Guia de Algebra
Control Nº2
Sumatorias.

P1] Sea $q \in (0,1)$. Se define $f: \mathbb{N}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$ por

$$f(m) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k(q-1)^k$$

Muestre que $|f(m)| \leq q^{m-1} \quad \forall m \in \mathbb{N}\setminus\{0\}$

Solución:

$$f(m) = \frac{1}{m}\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}k(q-1)^k = \frac{1}{m}\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}k(q-1)^k$$

el primer término ($k=0$) vale 0

Simplificando y reescribiendo algunas cosas

$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{m}\left[\frac{m!}{k!(m-k)!}\right]k(q-1)^k = \sum_{k=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(k-1)!((m-1)-(k-1))!}(q-1)^{k-1}(q-1)$$

$$= \left[\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}(q-1)^{k-1}\right](q-1) = \left[\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}(q-1)^k\right](q-1)$$

corrimiento del índice

$$= \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}(q-1)^k \underbrace{1^{(m-1)-k}}_{1}}_{\text{Formamos el binomio de Newton}}\right](q-1) = ((q-1)+1)^{m-1}(q-1)$$

$$= q^{m-1}(q-1)$$

$$\therefore |f(m)| = |q^{m-1}||q-1| < q^{m-1}$$

pues $|q^{m-1}| = q^{m-1}$ $(q>0)$
y $|q-1| < 1$ $(q \in (0,1))$ ∎

P2] Se define $H_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k}$

Pruebe que:

(a) $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \frac{1}{m+1}$$

(Control Nº2, 2000)

(b) $$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{k} = -H_m$$

Nota: (a) se pide demostrar sin usar inducción

Solución:

(a) $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{k+1} = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{k!(m-k)!}\,\frac{(-1)^k}{k+1}$$

Hago aparecer el $m+1$

$$= \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{m+1}\left[\frac{\overbrace{m!\,(m+1)}^{(m+1)!}}{(k+1)!\,(m-k)!}\right](-1)^k$$

$$= \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}(-1)^k = \frac{-1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}(-1)^{k+1}$$

Analicen esta igualdad

(2)

$$= \frac{-1}{m+1}\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-1)^k = \frac{-1}{m+1}\left[\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}(-1)^k - \overbrace{\binom{m+1}{0}(-1)^0}^{1}\right]$$

corrimiento de índice

Por Binomio de Newton (*)

(Niquitanipone)

como agregé el termino con $k=0$, se lo resto

$$= \frac{-1}{m+1}\left[\underbrace{\underbrace{\cancel{(-1+1)^{m+1}}}_{0} - 1}_{-1}\right] = \frac{1}{m+1} \blacksquare$$

(*) Recordar que
$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x^k = (1+x)^m$$

(b) Por inducción

Para $m=1$, $\sum_{k=1}^{1}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{k} = \binom{1}{1}\frac{(-1)^1}{1} = -1$ y $-H_1 = -\left(\frac{1}{1}\right) = -1$. ✓ ($m=1$)

Ahora si la hipotesis se cumple para algún $m \geq 1$, o sea
$$\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{k} = -H_m$$
probaremos que se cumple para $m+1$, o sea
$$\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{(-1)^k}{k} = -H_{m+1}$$

En efecto:

$$\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}\frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{m}\underbrace{\binom{m+1}{k}}_{\binom{m}{k}+\binom{m}{k-1}}\frac{(-1)^k}{k} + \underbrace{\cancel{\binom{m+1}{m+1}}}_{1}\frac{(-1)^{m+1}}{(m+1)}$$

el termino con $k=m+1$ de la sumatoria

$$= \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^k}{k}}_{\substack{-H_m \\ \text{(Por hipotesis)}}} + \underbrace{\sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k-1}\frac{(-1)^k}{k}}_{\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1}} + \frac{(-1)^{m+1}}{m+1}$$

corrimiento índice

$$= -H_m + \underbrace{\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} + \underbrace{\binom{m}{m}}_{1}\frac{(-1)^{m+1}}{m+1}}_{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{(-1)^{k+1}}{k+1} = (-1)\sum^{m}}$$

$$= -\underbrace{\left(H_m + \frac{1}{m+1}\right)}_{H_{m+1}} = -H_{m+1} \blacksquare$$

P3 Calcular: ③

(i) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2}$ (ii) $\displaystyle\sum_{k=m}^{m} \log\left(1+\frac{1}{k}\right)$ $(m \leq m)$

(iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m-1} \frac{1}{k!(m-k)!}$ $(m \geq 2)$ (iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{\sqrt{k}(k+1)+k\sqrt{k+1}}$

(v) $\displaystyle\sum_{k=1}^{m} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right)$

Nota: (ii) y (iii) son del Control 2, 1997 y (iv) del Control 2, 1998

Solución:

(i) $$\sum_{k=1}^{m} \frac{2k+1}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{m} \frac{(k+1)^2-k^2}{k^2(k+1)^2} = \sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{k^2}-\frac{1}{(k+1)^2}\right] = 1-\frac{1}{(m+1)^2}$$

(ii) $$\sum_{k=m}^{m} \log\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=m}^{m} \log\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=m}^{m}[\log(k+1)-\log(k)] = \log(m+1)-\log(m)$$
$$= \log\left(\frac{m+1}{m}\right)$$

(iii) $$\sum_{k=1}^{m-1}\frac{1}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m-1}\frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{1}{m!}\sum_{k=1}^{m-1}\binom{m}{k} = \frac{1}{m!}\left[\underbrace{\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}}_{2^m} - \underbrace{\binom{m}{0}}_{1} - \underbrace{\binom{m}{m}}_{1}\right]$$
$$= \frac{1}{m!}(2^m-2)$$

(iv) $$\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}(k+1)+k\sqrt{k+1}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}(\sqrt{k+1}+\sqrt{k})} \cdot \frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}$$
Factorizo Racionalizo
$$= \sum_{k=1}^{m}\frac{\sqrt{k+1}-\sqrt{k}}{\sqrt{k}\sqrt{k+1}\underbrace{((k+1)-k)}_{1}} = \sum_{k=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{k}}-\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$
$$= 1-\frac{1}{\sqrt{m+1}}$$

(v) $$\sum_{k=1}^{m} k\ln\left(1+\frac{1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m} k\ln\left(\frac{k+1}{k}\right) = \sum_{k=1}^{m} k\ln(k+1)-k\ln k$$
$$= \sum_{k=1}^{m}(k+1)\ln(k+1)-\ln(k+1)-k\ln k$$
sumo y resto $\ln(k+1)$
$$= \sum_{k=1}^{m}[(k+1)\ln(k+1)-k\ln k] - \sum_{k=1}^{m}\ln(k+1)$$
$$= (m+1)\ln(m+1) - \underbrace{1\cdot\ln 1}_{0} - \underbrace{[\ln(2)+\ln(3)+\ldots+\ln(m+1)]}_{\ln(2\cdot 3\cdots(m+1)) = \ln((m+1)!)}$$
$$= (m+1)\ln(m+1)-\ln((m+1)!) = \ln((m+1)^{m+1})-\ln((m+1)!)$$
$$= \ln\left(\frac{(m+1)^{m+1}}{(m+1)!}\right) = \ln\left(\frac{(m+1)^m}{m!}\right)$$
simplificando los $(m+1)$

P4] (a) Sean $(a_k)_{k\in\mathbb{N}}$ y $(b_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dos secuencias de números reales. Considere los naturales p y m tal que $p \leq m$.
Pruebe que:

$$\sum_{k=p}^{m} (a_{k+1}-a_k)\, b_k = a_{m+1} b_{m+1} - a_p b_p + \sum_{k=p}^{m} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)$$

(b) Calcule en función de H_m el valor de $\displaystyle\sum_{k=2}^{m} \frac{H_k}{k(k-1)}$

donde $H_k = \displaystyle\sum_{l=1}^{k} \frac{1}{l}$

Solución:

(a)
$$\sum_{k=p}^{m}(a_{k+1}-a_k)b_k = \sum_{k=p}^{m}\Big[a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k + \overbrace{\underbrace{a_{k+1}b_k - a_{k+1}b_{k+1}}_{a_{k+1}(b_k-b_{k+1})}}^{\text{Lo sumo y lo resto}}\Big]$$

$$= \sum_{k=p}^{m}\big[a_{k+1}b_{k+1} - a_k b_k\big] - \sum_{k=p}^{m} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k)$$

$$= a_{m+1}b_{m+1} - a_p b_p + \sum_{k=p}^{m} a_{k+1}(b_{k+1}-b_k) \quad ▨$$

(b) Notemos que
$$\sum_{k=2}^{m} \frac{H_k}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{m}\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) H_k = -\sum_{k=2}^{m}\Big(\underbrace{\frac{1}{k}}_{a_{k+1}} - \underbrace{\frac{1}{k-1}}_{a_k}\Big)\underbrace{H_k}_{b_k}$$

$p=2$

$a_k = \frac{1}{k-1}$

$b_k = H_k$

Por (a)

$$= -\left[\frac{1}{m} H_{m+1} - \frac{1}{1}\cdot H_2 - \sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k}\underbrace{(H_{k+1}-H_k)}_{\frac{1}{k+1}}\right]$$

$$= -\frac{1}{m} H_{m+1} + \left(1+\frac{1}{2}\right) + \underbrace{\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k(k+1)}}_{\sum_{k=2}^{m} \frac{1}{k} - \frac{1}{k+1} \;=\; \frac{1}{2} - \frac{1}{m+1}}$$

$$= -\frac{1}{m}\left(H_m + \frac{1}{m+1}\right) + 2 - \frac{1}{m+1}$$

$$= -\frac{1}{m} H_m + 2 - \frac{1}{m+1}\left(1+\frac{1}{m}\right) = -\frac{1}{m} H_m + 2 - \frac{1}{\cancel{m+1}}\left(\frac{\cancel{m+1}}{m}\right)$$

$$= 2 - \frac{1}{m}(1+H_m) \quad ▨$$

Otra forma de resolver (b) es la siguiente:

$$\sum_{k=2}^{m} \frac{H_k}{k(k-1)} = \sum_{k=2}^{m} H_k\left(\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}\right) = \sum_{k=2}^{m} \frac{\overbrace{H_{k-1}+\frac{1}{k}}^{H_k}}{k-1} - \frac{H_k}{k}$$

$$= \sum_{k=2}^{m}\Big[\frac{H_{k-1}}{k-1} - \frac{H_k}{k} + \underbrace{\frac{1}{(k-1)k}}_{\frac{1}{k-1} - \frac{1}{k}}\Big] = \sum_{k=2}^{m}\left[\left(\frac{H_{k-1}}{k-1} + \frac{1}{k-1}\right) - \left(\frac{H_k}{k} + \frac{1}{k}\right)\right]$$

$$= \left(\frac{\overset{1}{\cancel{H_1}}}{\cancel{1}} + \frac{1}{1}\right) - \left(\frac{H_m}{m} + \frac{1}{m}\right) = 2 - \frac{1}{m}(H_m+1) \quad ▨$$

(Notar que no usamos (a))

P5 (a) Pruebe sin usar inducción que para $m \geq 1$, $0 \leq k \leq m$, $\binom{m}{k} \leq \frac{m^k}{k!}$ y deduzca que $\left(1+\frac{1}{m}\right)^m \leq \sum_{k=0}^{m} \frac{1}{k!}$

(b) Sea $S = 1+(1+b)q+(1+b+b^2)q^2+\ldots+(1+b+\ldots+b^m)q^m$, donde $m \in \mathbb{N}$, $q, b \in \mathbb{R}$, $q, b \neq 1$. Escribir S como una expresión de dos sumatorias y calcúlela

(Control 2, 1997)

Solución:

$$(a)\ \binom{m}{k} = \frac{m!}{k!(m-k)!} = \frac{\overbrace{m(m-1)\cdots(m-k+1)}^{k \text{ números}}}{k!} \leq \frac{\overbrace{m\cdot m\cdots m}^{k \text{ veces}}}{k!} = \frac{m^k}{k!}$$

$$\therefore \left(1+\frac{1}{m}\right)^m = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\left(\frac{1}{m}\right)^k 1^{m-k} \leq \sum_{k=0}^{m}\frac{\cancel{m^k}}{k!}\cdot\frac{1}{\cancel{m^k}} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!} \quad \blacksquare$$

$$(b)\ S = \sum_{j=0}^{m}(1+b+\ldots+b^j)q^j = \sum_{j=0}^{m}\underbrace{\left(\sum_{i=0}^{j} b^i\right)}_{\frac{1-b^{j+1}}{1-b}} q^j \quad \leftarrow b \neq 1.$$

$$= \frac{1}{1-b}\sum_{j=0}^{m}\underbrace{(1-b^{j+1})q^j}_{q^j - b(bq)^j} = \frac{1}{1-b}\left[\underbrace{\sum_{j=0}^{m} q^j}_{\frac{1-q^{m+1}}{1-q}} - \underbrace{b\sum_{j=0}^{m}(bq)^j}_{b\left(\frac{1-(bq)^{m+1}}{1-bq}\right)}\right]$$

$$= \frac{1}{1-b}\left[\frac{1-q^{m+1}}{1-q} - b\left(\frac{1-(bq)^{m+1}}{1-bq}\right)\right] \quad \blacksquare$$

$q \neq 1$

Notamos que debemos pedir que $bq \neq 1$

P6 Sean p, q reales no negativos tales que $p+q=1$. Calcular $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}p^k q^{m-k} k^2$

Hint: $k^2 = k^2 - k + k$

Solución:

$$\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}p^k q^{m-k}\underbrace{k^2}_{k(k-1)+k} = \sum_{k=0}^{m} k(k-1)\binom{m}{k}p^k q^{m-k} + \sum_{k=0}^{m} k\binom{m}{k}p^k q^{m-k}$$

El término con $k=0$ y $k=1$ valen "0" — El término con $k=0$ vale "0"

$$= \sum_{k=2}^{m} k(k-1)\frac{m!}{k!(m-k)!}p^k q^{m-k} + \sum_{k=1}^{m} k\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!}p^k q^{m-k}$$

$$= \sum_{k=2}^{m}\frac{m!}{(k-2)!(m-k)!}p^k q^{m-k} + \sum_{k=1}^{m}\frac{m!}{(k-1)!(m-k)!}p^k q^{m-k}$$

$$= m(m-1)\sum_{k=2}^{m}\frac{(m-2)!}{(k-2)!(m-k)!}p^k q^{m-k} + m\sum_{k=1}^{m}\frac{(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}p^k q^{m-k}$$

$$= p^2 m(m-1)\sum_{k=2}^{m}\binom{m-2}{k-2}p^{k-2}q^{m-k} + pm\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}p^{k-1}q^{m-k}$$

$$= p^2 m(m-1)\sum_{k=0}^{m-2}\binom{m-2}{k}p^k q^{\underbrace{m-(k+2)}_{(m-2)-k}} + pm\sum_{k=0}^{m-1}\binom{m-1}{k}p^k q^{\underbrace{m-(k+1)}_{(m-1)-k}}$$

$$= p^2 m(m-1)\cancelto{1}{(p+q)}^{m-2} + pm\cancelto{1}{(p+q)}^{m-1} = p^2 m(m-1) + pm$$

Nota: Si $p = q = \frac{1}{2}$ $(p+q=1)$ $\Rightarrow \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}\frac{1}{2^m}k^2 = \left(\frac{1}{2}\right)^2 m(m-1) + \left(\frac{1}{2}\right)m$

$$= \frac{m}{2}\left(\frac{m-1}{2}+1\right) = \frac{m}{2}\left(\frac{m+1}{2}\right)$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} k^2\binom{m}{k} = 2^{m-2}m(m+1) \quad ▨$$

7] Calcule

(a) $\sum_{k=0}^{m}\frac{\binom{m}{k}}{k+1}$ (b) $\sum_{k=0}^{m}\binom{r}{k}(-1)^k$ con $0 \leq m < r$ (Control 2, 2001)

(c) $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2$ (d) $\sum_{k=0}^{m}(k+1)\binom{m}{k}^2$

(e) $\sum_{k=p}^{m}\binom{m-p}{k-p}\binom{m}{k}$ con $0 \leq p \leq m$

Solución:

a) $$\sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k+1}\binom{m}{k} = \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k+1}\cdot\frac{m!}{k!(m-k)!} = \sum_{k=0}^{m}\frac{m!}{(k+1)!(m-k)!}$$

$$= \left[\sum_{k=0}^{m}\frac{(m+1)!}{(k+1)!(m-k)!}\right]\cdot\frac{1}{m+1} = \left[\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}\right]\frac{1}{m+1} = \left[\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}\right]\frac{1}{m+1}$$

$$= \left[\underbrace{\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}}_{2^{m+1}} - \cancelto{1}{\binom{m+1}{0}}\right]\frac{1}{m+1} = \frac{2^{m+1}-1}{m+1} \quad ▨$$

b) $$\sum_{k=0}^{m}\binom{r}{k}(-1)^k = \sum_{k=0}^{m}\left[\binom{r-1}{k}+\binom{r-1}{k-1}\right](-1)^k = \sum_{k=0}^{m}\left[\binom{r-1}{k}(-1)^k + \binom{r-1}{k-1}(-1)^k\right]$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\left[\binom{r-1}{k}(-1)^k - \binom{r-1}{k-1}(-1)^{k-1}\right] = \binom{r-1}{m}(-1)^m - \cancelto{0}{\binom{r-1}{-1}(-1)^{-1}}$$

$$= \binom{r-1}{m}(-1)^m \quad ▨$$

Nota: $\binom{m}{m} = 0$ si $m \geq 0$ y $m < 0$ (o $m > m$)
de tal manera que $\binom{m}{k} = \binom{m-1}{k-1} + \binom{m-1}{k}$ sea válido $\forall m > 0$ y $k \in \mathbb{Z}$

(c), (d) y (e) Probaremos primero que

$$\sum_{k=p}^{m}\binom{m-p}{k-p}\binom{m}{k} = \binom{\ldots}{\ldots}p$$

Consideremos el coef. de x^m en el producto $(1+x)^{m-p}(1+x)^m$

$$\left[\binom{m-p}{0}x^0 + \binom{m-p}{1}x^1 + \ldots + \binom{m-p}{m-p}x^{m-p}\right]\left[\binom{m}{0}x^0 + \binom{m}{1}x^1 + \ldots + \binom{m}{p}x^p + \ldots + \binom{m}{m}x^m\right]$$

que vale $\binom{m-p}{m-p}\binom{m}{p}+\binom{m-p}{m-p-1}\binom{m}{p+1}+\dots+\binom{m-p}{0}\binom{m}{m}$

$m-(p+1)$

$$=\sum_{k=p}^{m}\binom{m-p}{m-k}\binom{m}{k}=\sum_{k=p}^{m}\binom{m-p}{(m-p)-(m-k)}\binom{m}{k}$$

Pues $\binom{m}{k}=\binom{m}{m-k}$

$$=\sum_{k=p}^{m}\binom{m-p}{k-p}\binom{m}{k}$$

Por otro lado $(1+x)^{m-p}(1+x)^m=(1+x)^{2m-p}$ donde el coeficiente de x^m vale $\binom{2m-p}{m}$ pues $(1+x)^{2m-p}=\sum_{k=0}^{2m-p}\binom{2m-p}{k}x^k$

Finalmente $\sum_{k=p}^{m}\binom{m-p}{k-p}\binom{m}{k}=\binom{2m-p}{m}$ ∎ (Tenemos (e))

Como casos particulares tenemos:

Para $p=0$: $\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2=\binom{2m}{m}$ ∎ (Tenemos (c))

y para $p=1$ $\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}\binom{m}{k}=\binom{2m-1}{m}$ El término con $k=0$ vale "0". Por (c)

Ahora: $\sum_{k=0}^{m}(k+1)\binom{m}{k}^2=\sum_{k=0}^{m}k\binom{m}{k}^2+\sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}^2=\sum_{k=1}^{m}k\binom{m}{k}\binom{m}{k}+\binom{2m}{m}$

$$=\sum_{k=1}^{m}k\frac{m!}{k!(m-k)!}\binom{m}{k}+\binom{2m}{m}=\sum_{k=1}^{m}\frac{m(m-1)!}{(k-1)!(m-k)!}\binom{m}{k}+\binom{2m}{m}$$

$$=m\underbrace{\sum_{k=1}^{m}\binom{m-1}{k-1}\binom{m}{k}}_{\binom{2m-1}{m}}+\binom{2m}{m}=m\binom{2m-1}{m}+\underbrace{\binom{2m}{m}}_{\frac{(2m)!}{m!\,m!}=\frac{2m(2m-1)!}{m(m-1)!\,m!}=2\binom{2m-1}{m}}$$

$$=(m+2)\binom{2m-1}{m}\ \blacksquare$$

P8 Calcule el valor de las siguientes sumatorias telescópicas.

(i) $\sum_{k=1}^{m}\frac{k2^k}{(k+2)!}$ (ii) $\sum_{k=1}^{m}\frac{(k+2)}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{2^k}$

(iii) $\sum_{k=1}^{m}\frac{2k}{k^4+k^2+1}$ (iv) $\sum_{k=1}^{m}\cos[(2k-1)x]$ con $x\neq k\pi$, $k\in\mathbb{Z}$

(v) $\sum_{k=1}^{m}(k^2+1)k!$ (vi) $\sum_{k=1}^{m}\operatorname{sen}(k\alpha)$

olución:

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{k\cdot 2^k}{(k+2)!}=\sum_{k=1}^{m}\frac{[(k+2)-2]2^k}{(k+2)!}=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{2^k}{(k+1)!}-\frac{2^{k+1}}{(k+2)!}\right]$$

$$=\frac{2^1}{2!}-\frac{2^{m+1}}{(m+2)!}=1-\frac{2^{m+1}}{(m+2)!}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{(k+2)}{k(k+1)}\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2(k+1)-k}{k(k+1)}\right)\cdot\frac{1}{2^k}=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{2}{k}-\frac{1}{k+1}\right)\cdot\frac{1}{2^k}$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{2^{k-1}k}-\frac{1}{2^k(k+1)}\right)=1-\frac{1}{2^m(m+1)}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\frac{2k}{k^4+k^2+1}=\sum_{k=1}^{m}\frac{(k^2+k+1)-(k^2-k+1)}{(k^2+1)^2-k^2}$$

$$(k^2+k+1)(k^2-k+1)$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{k^2-k+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right]$$ pues $k^2-k+1=(k-1)^2+(k-1)+1$

$$=\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{(k-1)^2+(k-1)+1}-\frac{1}{k^2+k+1}\right]=1-\frac{1}{m^2+m+1}$$

$$\sum_{k=1}^{m}\cos[(2k-1)x]=\sum_{k=1}^{m}\frac{2\,\text{sen}(x)\cos[(2k-1)x]}{2\,\text{sen}(x)}$$

$$\overset{*}{=}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\text{sen}(2kx)}{2\,\text{sen}(x)}-\frac{\text{sen}(2(k-1)x)}{2\,\text{sen}(x)}\right]$$

$$=\frac{\text{sen}(2mx)}{2\,\text{sen}(x)}$$

(*) $\text{sen}(\alpha+\beta)-\text{sen}(\alpha-\beta)=2\,\text{sen}\,\beta\cos\alpha$

$$\sum_{k=1}^{m}(k^2+1)k!=\sum_{k=1}^{m}[k(k+1)-(k-1)]k!$$

$$=\sum_{k=1}^{m}[k(k+1)!-(k-1)k!]=m(m+1)!$$

$$\sum_{k=1}^{m}\text{sen}(k\alpha)=\sum_{k=1}^{m}\frac{2\,\text{sen}(k\alpha)\,\text{sen}(\frac{\alpha}{2})}{2\,\text{sen}(\frac{\alpha}{2})}$$

$$\overset{*}{=}\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{\cos(\alpha(k-\frac{1}{2}))}{2\,\text{sen}(\frac{\alpha}{2})}-\frac{\cos(\alpha(k+\frac{1}{2}))}{2\,\text{sen}(\frac{\alpha}{2})}\right]$$

$$\cos(\alpha((k-1)+\tfrac{1}{2}))\qquad=\frac{\cos(\frac{\alpha}{2})-\cos(\alpha(m+\frac{1}{2}))}{2\,\text{sen}(\frac{\alpha}{2})}$$

(*) $\cos(\alpha-\beta)-\cos(\alpha+\beta)=2\,\text{sen}\,\alpha\,\text{sen}\,\beta$

P9 Probar que $\forall m \in \mathbb{N}$ y $\forall x \in \mathbb{R} \setminus \left\{ \frac{k\pi}{2^t} \,/\, t = 0, 1, \ldots, m \text{ y } k \in \mathbb{Z} \right\}$

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\operatorname{sen}(2^i x)} = \operatorname{ctg}(x) - \operatorname{ctg}(2^m x)$$

(Olimpiada Mundial)

Solución: Notemos que:

$$\operatorname{ctg}(2^{i-1}x) - \operatorname{ctg}(2^i x) = \frac{\cos(2^{i-1}x)}{\operatorname{sen}(2^{i-1}x)} - \frac{\cos(2^i x)}{\operatorname{sen}(2^i x)}$$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2^i x)\cos(2^{i-1}x) - \cos(2^i x)\operatorname{sen}(2^{i-1}x)}{\operatorname{sen}(2^{i-1}x)\operatorname{sen}(2^i x)}$$

Pues $\operatorname{sen}(\alpha-\beta) = \operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta$

$$= \frac{\operatorname{sen}(2^i x - 2^{i-1}x)}{\operatorname{sen}(2^{i-1}x)\operatorname{sen}(2^i x)} \overset{(*)}{=} \frac{\cancel{\operatorname{sen}(2^{i-1}x)}}{\cancel{\operatorname{sen}(2^{i-1}x)}\operatorname{sen}(2^i x)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(2^i x)}$$

(*) $2^i x - 2^{i-1}x = 2^{i-1}x(2-1) = 2^{i-1}x$

Así
$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{\operatorname{sen}(2^i x)} = \sum_{i=1}^{m}\left[\operatorname{ctg}(2^{i-1}x) - \operatorname{ctg}(2^i x)\right] = \operatorname{ctg}(x) - \operatorname{ctg}(2^m x)$$

P10 Pruebe que
$$\sum_{k=0}^{88^\circ} \frac{1}{\cos(k)\cos(k+1)} = \frac{\cos 1^\circ}{\operatorname{sen}^2(1^\circ)}$$

(Olimpiada Matemática Estadounidense)

Solución:

$$\frac{\operatorname{sen}(\alpha-\beta)}{\cos\beta\cos\alpha} = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta - \cos\alpha\operatorname{sen}\beta}{\cos\beta\cos\alpha} = \operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}\beta$$

Luego:
$$\sum_{k=0}^{88} \frac{1}{\cos(k)\cos(k+1)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(1^\circ)} \sum_{k=0}^{88} \frac{\operatorname{sen}(1^\circ)}{\cos(k)\cos(k+1)}$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(1^\circ)} \sum_{k=0}^{88} \frac{\operatorname{sen}((k+1)-k)}{\cos(k)\cos(k+1)} = \frac{1}{\operatorname{sen}(1^\circ)} \sum_{k=0}^{88}\left[\operatorname{tg}(k+1) - \operatorname{tg}(k)\right]$$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(1)}\left[\operatorname{tg}89 - \underbrace{\operatorname{tg}0}_{0}\right] = \frac{1}{\operatorname{sen}(1)} \cdot \frac{\operatorname{sen}(89)}{\cos(89)}$$

Pues $\operatorname{sen}(\alpha) = \cos(90-\alpha)$

$$= \frac{1}{\operatorname{sen}(1)} \; \frac{\cos(1)}{\operatorname{sen}(1)} \quad \frac{\cos(1)}{\operatorname{sen}^2(1)}$$

P11 i) Pruebe que $\displaystyle\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = m^2$

ii) Calcule $\displaystyle A = \sum_{i=\frac{m(m-1)}{2}+1}^{\frac{m(m+1)}{2}} (2i-1)$ (Control 2, 1998)

Solución:

i) Primera forma: $\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = 2\sum_{k=1}^{m} k - \sum_{k=1}^{m} 1 = \cancel{2}\left(\frac{m(m+1)}{\cancel{2}}\right) - m$
$= m^2+m-m = m^2$

Segunda forma: (Mas creativa) $\sum_{k=1}^{m}(2k-1) = \sum_{k=1}^{m}\left[k^2-(k-1)^2\right] = m^2 - 0^2 = m^2$ ▨

ii) $A = \sum_{i=1}^{\frac{m(m+1)}{2}}(2i-1) - \sum_{i=1}^{\frac{m(m-1)}{2}}(2i-1) = \left[\frac{m(m+1)}{2}\right]^2 - \left[\frac{m(m-1)}{2}\right]^2$

$= \left(\frac{m}{2}\right)^2\left[\underbrace{(m^2+2m+1)-(m^2-2m+1)}_{4m}\right]$

$= m^3$ ▨

P12 (i) Sean $x, y \in \mathbb{R}\setminus\{0\}$, $x \neq y$. Pruebe sin usar inducción que para todo $m \geq 1$:

$$\sum_{i=0}^{m-1} x^{m-i-1} y^i = \frac{x^m - y^m}{x-y} \quad \text{(Control 2, 1999)}$$

(ii) Demuestre por inducción que para $m \geq 1$

$$\sum_{k=m+1}^{2m} \frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2m} \frac{(-1)^{k+1}}{k} \quad \text{(Control 2, 1999)}$$

(iii) Pruebe que $\forall m \in \mathbb{N}$, $m \geq 3$, se tiene que

$$\frac{3}{2} - \frac{1}{m} + \frac{1}{m^2} < \sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k^2} \quad \text{(Control 2, 2001)}$$

Solución:

(i) $\sum_{i=0}^{m-1} x^{m-i-1} y^i = \sum_{i=0}^{m-1} x^{m-1}\left(\frac{y}{x}\right)^i = x^{m-1}\sum_{i=0}^{m-1}\left(\frac{y}{x}\right)^i$

$= x^{m-1} \cdot \frac{1-\left(\frac{y}{x}\right)^m}{1-\frac{y}{x}} \quad \begin{matrix}/\cdot x \\ /\cdot x\end{matrix}$

$= \frac{x^m\left(1-\left(\frac{y}{x}\right)^m\right)}{x-y} = \frac{x^m-y^m}{x-y}$ ▨

(ii) Para $m=1$ $\sum_{k=m+1}^{2m}\frac{1}{k} = \sum_{k=2}^{2}\frac{1}{k} = \frac{1}{2}$ y $\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k+1}}{k} = \sum_{k=1}^{2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$

$= \frac{(-1)^2}{1} + \frac{(-1)^3}{2}$

$= 1 - \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$ //

Supongamos ahora que la afirmación se cumple para algún $m \geq 1$, o sea que $\sum_{k=m+1}^{2m}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$ y probaremos que se cumple para $m+1$, o sea:

$$\sum_{k=m+2}^{2(m+1)}\frac{1}{k} = \sum_{k=1}^{2(m+1)}\frac{(-1)^{k+1}}{k}$$

(11)

En efecto: $\displaystyle\sum_{k=m+2}^{2(m+1)}\frac{1}{k}=\sum_{k=m+2}^{2m+2}\frac{1}{k}=\sum_{k=m+1}^{2m}\frac{1}{k}-\frac{1}{m+1}+\underbrace{\frac{1}{2m+1}+\frac{1}{2m+2}}$

Aquí saqué dos términos

Por este lado agregó un término

Resto lo agregado

Coloco lo que quité

Por hipótesis

$$=\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{1}{2m+1}+\underbrace{\left(\frac{1}{2m+2}-\frac{1}{m+1}\right)}_{\frac{1-2}{2m+2}=-\frac{1}{2m+2}}$$

$$=\sum_{k=1}^{2m}\frac{(-1)^{k+1}}{k}+\frac{\overset{1}{(-1)^{(2m+1)+1}}}{2m+1}+\frac{(-1)^{(2m+2)+1}}{2m+2}\ {}^{-1}$$

Pues $2m+2$ es par y $2m+3$ es impar

$$=\sum_{k=1}^{2m+2}\frac{(-1)^{k+1}}{k}=\sum_{k=1}^{2(m+1)}\frac{(-1)^{k+1}}{k}\ \blacksquare$$

(iii) Notamos que para $m=3$, $\frac{3}{2}-\frac{1}{3}+\frac{1}{9}=\frac{27-6+2}{18}=\frac{23}{18}=\frac{46}{36}$

y $\displaystyle\sum_{k=1}^{3}\frac{1}{k^2}=1+\frac{1}{4}+\frac{1}{9}=\frac{36+9+4}{36}=\frac{49}{36}$ y se cumple la desigualdad.

Supongamos válido para algún m que $\displaystyle\frac{3}{2}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}<\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}$

y probemos que $\displaystyle\frac{3}{2}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}<\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}$ (La proposición para $m+1$).

Efectivamente:

$$\sum_{k=1}^{m+1}\frac{1}{k^2}=\left[\sum_{k=1}^{m}\frac{1}{k^2}\right]+\frac{1}{(m+1)^2}>\frac{3}{2}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}+\frac{1}{(m+1)^2}$$

Por hipótesis de inducción.

$$=\frac{3}{2}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}+\underbrace{\frac{1}{m+1}-\frac{1}{m}+\frac{1}{m^2}}_{\frac{m^2-m(m+1)+(m+1)}{m^2(m+1)}=\frac{1}{m^2(m+1)}>0}$$

$$>\frac{3}{2}-\frac{1}{m+1}+\frac{1}{(m+1)^2}\ \blacksquare$$

P13 (i) Pruebe por inducción

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{i}}\geq 2(\sqrt{m+1}-1)$$ (Control 2 3)

(ii) Se define la función $\varphi_1:\mathbb{R}\times\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ como $\varphi_1(x_0,x_1)=x_0+x_1$. Y para cada natural $m\geq 2$ se define por recurrencia la función $\varphi_m:\mathbb{R}^{m+1}\to\mathbb{R}$ como

$$\varphi_m(x_0,x_1,\dots,x_m)=\varphi_{m-1}(x_0,x_1,\dots,x_{m-1})+\varphi_{m-1}(x_1,\dots,x_m)$$

en cada $x_0,x_1,\dots,x_m\in\mathbb{R}$

Probar usando inducción que: (12)

$$\varphi_m(x_0,\dots,x_m) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_k \quad \text{(Control 2, 1998)}$$

Solución:

i) Vemos que para $m=1$,

$$\sum_{i=1}^{1}\frac{1}{\sqrt{i}} = 1 \quad \text{y que} \quad 2(\sqrt{2}-1) < 2\left(\frac{3}{2}-1\right) = 2\cdot\frac{1}{2} = 1$$

Luego se cumple la desigualdad (Incluso en forma estricta)

Supongamos que la afirmación es cierta para algún m, o sea

$$\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{i}} \geq 2(\sqrt{m+1}-1)$$ y probemos que es cierta para $m+1$, o sea: $$\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{i}} \geq 2\left(\sqrt{m+2}-1\right)$$

En efecto: $$\sum_{i=1}^{m+1}\frac{1}{\sqrt{i}} = \left[\sum_{i=0}^{m}\frac{1}{\sqrt{i}}\right] + \frac{1}{\sqrt{m+1}} \underset{\text{Hipótesis}}{\geq} 2\left(\sqrt{m+1}-1\right) + \frac{1}{\sqrt{m+1}}$$

$$= 2\left(\sqrt{m+2}-1\right) + \underbrace{2\sqrt{m+1} + \frac{1}{\sqrt{m+1}} - 2\sqrt{m+2}}$$

$$\frac{2(m+1)+1-2\sqrt{(m+1)(m+2)}}{\sqrt{m+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{(2m+3)^2} - \sqrt{4(m^2+3m+2)}}{\sqrt{m+1}}$$

$$= \frac{\sqrt{4m^2+12m+9} - \sqrt{4m^2+12m+8}}{\sqrt{m+1}} > 0$$

$$> 2\left(\sqrt{m+2}-1\right)$$ $\blacksquare$ [Notar que se puede probar que $\forall m \geq 1$ $\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{\sqrt{i}} > 2(\sqrt{m+1}-1)$ ← Estricta]

(ii) Para $m=1$ $\varphi_1(x_0,x_1) = x_0+x_1$

$$\text{y } \sum_{k=0}^{1}\binom{1}{k}x_k = \binom{1}{0}x_0 + \binom{1}{1}x_1 = x_0+x_1$$

por lo que la igualdad es cierta.

Supongamos que la afirmación es cierta para algún $m \in \mathbb{N}$ o sea que

$$\varphi_m(x_0,x_1,\dots,x_m) = \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_k$$ para cualesquiera $x_0,x_1,\dots,x_m \in \mathbb{R}$ (cualquier secuencia de $(m+1)$ terminos).

Probemos entonces la afirmación para $m+1$.

$$\varphi_{m+1}(x_0,x_1,\dots,x_m,x_{m+1}) \underset{\text{por la recurrencia}}{=} \varphi_m(x_0,\dots,x_m) + \varphi_m(x_1,\dots,x_{m+1})$$

$$= \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_k + \sum_{k=0}^{m}\binom{m}{k}x_{k+1}$$ Por hipótesis

Notemos que la hipótesis la podíamos usar pues tanto $x_0, x_1, \dots, x_m$ como $x_1, x_2, \dots, x_{m+1}$ tienen $(m+1)$ términos y de Leg esta aplicando φ_m.

Siguiendo...

corrimiento de índice

$$\varphi_{m+1}(x_0, \dots, x_{m+1}) = \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} x_k + \sum_{k=1}^{m+1} \binom{m}{k-1} x_k$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k} x_k + \underbrace{\binom{m}{0} x_0}_{x_0} + \sum_{k=1}^{m} \binom{m}{k-1} x_k + \underbrace{\binom{m}{m} x_m}_{x_m}$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \left[\binom{m}{k} + \binom{m}{k-1} \right] x_k + \quad x_m$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \binom{m+1}{k} x_k + \overbrace{\binom{m+1}{0} x_0}^{x_0} + \overbrace{\binom{m+1}{m+1} x_m}^{x_m}$$

$$= \sum_{k=0}^{m+1} \binom{m+1}{k} x_k \quad ▨$$

P14 (a) Sea $p \in \mathbb{N}$ un número natural fijo. Probar por inducción que $(\forall m \in \mathbb{N} \setminus \{0\})$

$$\frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \frac{(p+2)!}{2!} + \dots + \frac{(p+m-1)!}{(m-1)!} = \frac{1}{p+1} \frac{(p+m)!}{(m-1)!}$$

Use la propiedad anterior para deducir las fórmulas para calcular $\sum_{k=1}^{m} k$ y $\sum_{k=1}^{m} k^2$. (Control 2, 1998)

(b) Sean $m, r \in \mathbb{N}$ tales que $0 \leq m < r$. Pruebe que

$$\sum_{k=0}^{m} \binom{r}{k} (-1)^k = (-1)^m \binom{r-1}{m}$$ "usando" inducción.

(Control 2, 2001)

Solución:

(a) Para $m = 1$

$$\frac{p!}{0!} = \frac{1}{\cancel{p+1}} \frac{\overbrace{(p+1)!}^{\cancel{(p+1)}\, p!}}{(0)!}$$ La igualdad es clara

Suponiendo valida la afirmación para algún m, probémosla para $m+1$

En efecto

$$\frac{p!}{0!} + \frac{(p+1)!}{1!} + \dots + \frac{(p+m-1)!}{(m-1)!} + \frac{(p+m)!}{m!}$$

$$= \frac{1}{p+1} \frac{(p+m)!}{(m-1)!} + \frac{(p+m)!}{m!} = \frac{m(p+m)! + (p+1)(p+m)!}{(p+1)\, m!}$$

Por hipótesis

$$= \frac{(p+m)!\, (p+m+1)}{(p+1)\, m!}$$

$$= \frac{1}{p+1} \cdot \frac{(p+(m+1))!}{((m+1)-1)!} \quad ▨$$

(Deducir $\sum_{k=1}^{m} k$ y $\sum_{k=1}^{m} k^2$ queda propuesto.)

) Aquí vamos a decidir el parámetro sobre el cual hacer la inducción (m ó r) y el elegido es : "m" (14)

Veamos para $m=0$

$$\sum_{k=0}^{0}\binom{r}{k}(-1)^k = \binom{r}{0}(-1)^0 = 1 \quad \text{con } 0<r$$

y $(-1)^0\binom{r-1}{0} = 1$ ∴ la igualdad se cumple. $r \geq 1$

Supongamos que la afirmación es cierta para algún m, o sea que $\forall \underline{\underline{r>m}}$ $\displaystyle\sum_{k=0}^{m}\binom{r}{k}(-1)^k = (-1)^m\binom{r-1}{m}$

Probemos entonces lo mismo para $m+1$, o sea que

$$\forall r > m+1 \quad \sum_{k=0}^{m+1}\binom{r}{k}(-1)^k = (-1)^{m+1}\binom{r-1}{m+1}$$

En efecto

$$\sum_{k=0}^{m+1}\binom{r}{k}(-1)^k = \underbrace{\left[\sum_{k=0}^{m}\binom{r}{k}(-1)^k\right]}_{(-1)^m\binom{r-1}{m}} + \binom{r}{m+1}(-1)^{m+1}$$

pues como $r>m+1$, en particular $\underline{\underline{r>m}}$

$$= (-1)^{m+1}\left[\underbrace{\binom{r}{m+1}}_{\binom{r-1}{m+1}+\cancel{\binom{r-1}{m}}} - \cancel{\binom{r-1}{m}}\right] = (-1)^{m+1}\binom{r-1}{m+1} \blacksquare$$

15 Sea $(a_m)_{m\in\mathbb{N}}$ una progresión aritmética

(i) Si $a_i = x$, $a_j = y$, $a_k = z$ para $i,j,k \in \mathbb{N}$. Pruebe que $(j-k)x+(k-i)y+(i-j)z = 0$

(ii) Pruebe que $\dfrac{1}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_1}} + \dfrac{1}{\sqrt{a_1}+\sqrt{a_2}} + \dots + \dfrac{1}{\sqrt{a_{m-1}}+\sqrt{a_m}} = \dfrac{m}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_m}}$

Solución:

i) $a_i = x = a_0 + i\delta$, $a_j = y = a_0 + j\delta$, $a_k = z = a_0 + k\delta$

$$\Rightarrow (j-k)x+(k-i)y+(i-j)z$$
$$= i(z-y)+j(x-z)+k(y-x)$$
$$= i(k-j)\delta + j(i-k)\delta + k(j-i)\delta$$
$$= \delta\left[\cancel{ik}-\cancel{ij}+\cancel{ij}-\cancel{jk}+\cancel{kj}-\cancel{ki}\right] = 0.$$

ii)

$$\sum_{i=0}^{m-1}\frac{1}{\sqrt{a_i}+\sqrt{a_{i+1}}} \overset{\text{racionalizo}}{=} \sum_{i=0}^{m-1}\frac{\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}}{\underbrace{(a_i-a_{i+1})}_{=-d}}$$

← La diferencia constante entre dos términos consecutivos

$$= -\frac{1}{d}\sum_{i=0}^{m-1}\left[\sqrt{a_i}-\sqrt{a_{i+1}}\right]$$

racionalizo

$$= -\frac{1}{d}\left(\sqrt{a_0}-\sqrt{a_m}\right)\frac{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_m}}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_m}} = -\frac{1}{d}\,\frac{\overbrace{(a_0-a_m)}^{-md}}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_m}} = \frac{m}{\sqrt{a_0}+\sqrt{a_{m-1}}} \blacksquare$$

P16 Sean k, p, m naturales tales que $0 \leq k \leq p \leq m$ (15)
Pruebe las siguientes igualdades:

(a) $\binom{m}{k}\binom{m-k}{p-k} = \binom{m}{p}\binom{p}{k}$

(b) $\binom{m}{0}\binom{m}{p} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{p-1} + \dots + \binom{m}{p}\binom{m-p}{0} = 2^p\binom{m}{p}$

Solución:

(a) $$\binom{m}{k}\binom{m-k}{p-k} = \frac{m!}{k!\cancel{(m-k)!}} \cdot \frac{\cancel{(m-k)!}}{(p-k)!(m-p)!}$$
$$= \frac{m!}{(m-p)!\,p!} \cdot \frac{p!}{k!(p-k)!}$$ Los hacemos aparecer
$$= \binom{m}{p}\binom{p}{k}$$

(b) $$\binom{m}{0}\binom{m-0}{p-0} + \binom{m}{1}\binom{m-1}{p-1} + \dots + \binom{m}{p}\binom{m-p}{p-p}$$
$$= \binom{m}{p}\binom{p}{0} + \binom{m}{p}\binom{p}{1} + \dots + \binom{m}{p}\binom{p}{p} = \binom{m}{p}\underbrace{\left[\binom{p}{0}+\binom{p}{1}+\dots+\binom{p}{p}\right]}_{2^p}$$
por (a)

P17 Los números reales $a_0, a_1, \dots$ satisfacen $1 = a_0 \leq a_1 \leq a_2 \leq \dots$ y sea $\{b_m\}_{m\in\mathbb{N}}$ definida por
$$b_m = \sum_{k=1}^{m}\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}}$$
(Olimpiada Mundial)

Pruebe que $b_m \in [0, 2)$

Solución

$$\left(1 - \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}} = \left(\frac{a_k - a_{k-1}}{a_k}\right)\cdot\frac{1}{\sqrt{a_k}} \geq 0$$ pues $a_k \geq 1 > 0$ y $a_k \geq a_{k-1}$

Luego $b_m \geq 0$ (Pues es suma de terminos ≥ 0)

Ahora: $$b_m = \sum_{k=1}^{m}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{a_{k-1}} - \frac{1}{a_k}\right) = \sum_{k=1}^{m}\frac{a_{k-1}}{\sqrt{a_k}}\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}}+\frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$
$$= \sum_{k=1}^{m}\left(\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}} + \frac{a_{k-1}}{a_k}\right)\left(\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right)$$

y $\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}} + \frac{a_{k-1}}{a_k} \leq 2$ pues $a_{k-1} \leq a_k$ (Luego $\frac{a_{k-1}}{a_k} < 1$ y $\frac{\sqrt{a_{k-1}}}{\sqrt{a_k}} < 1$)

$$\Rightarrow b_m \leq 2\sum_{k=1}^{m}\left[\frac{1}{\sqrt{a_{k-1}}} - \frac{1}{\sqrt{a_k}}\right] = 2\left(1 - \frac{1}{\sqrt{a_m}}\right) < 2$$

$\therefore b_m \in [0, 2)$

8| (i) Pruebe sin usar inducción que para cada natural $m \geq 1$ $\sum_{k=2}^{m+1}\binom{k}{2} = \binom{m+2}{3}$ (Control 2, 1995)

(ii) Ocupando sumas conocidas encuentre la formula de:
$$1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (m-1)m$$
y demuéstrela por inducción.

(iii) Pruebe que $\sum_{k=0}^{m}(1+x)^k = \sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}x^k$

Solución:

(i) $$\sum_{k=2}^{m+1}\binom{k}{2} = \sum_{k=1}^{m}\binom{k+1}{2} = \sum_{k=1}^{m}\frac{(k+1)!}{(k-1)!\,2!} = \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{m}k(k+1)$$
$$= \frac{1}{2}\left[\sum_{k=1}^{m}k^2 + \sum_{k=1}^{m}k\right] = \frac{1}{2}\left[\frac{m(m+1)(2m+1)}{6} + \frac{m(m+1)}{2}\right]$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{m(m+1)}{2}\right)\left[\frac{2m+1}{3} + 1\right] = \frac{1}{2}\left(\frac{m(m+1)}{\cancel{2}}\right)\frac{\cancel{2}(m+2)}{3}$$
$$= \frac{m(m+1)(m+2)}{3!} = \frac{(m+2)!}{(m-1)!\,3!} = \binom{m+2}{3}$$

(ii) $$\sum_{i=1}^{m-1} i(i+1) = \sum_{i=1}^{m-1} i^2 + \sum_{i=1}^{m-1} i = \frac{(m-1)m(2m-1)}{6} + \frac{(m-1)m}{2}$$
$$= \frac{m(m-1)}{2}\left[\frac{2m-1}{3} + 1\right]$$
$$= \frac{m(m-1)}{\cancel{2}}\cdot\frac{\cancel{2}(m+1)}{3}$$
$$= \frac{m(m^2-1)}{3} = \frac{m^3-m}{3}$$

Probémosla por inducción:

Para $m=2$ $\quad 1\cdot 2 = \frac{2^3-2}{3}$ ✓

Supongamos la fórmula valida para algun m y probémosla para $m+1$

Vemos que $1\cdot 2 + 2\cdot 3 + \ldots + (m-1)m + m(m+1)$
$$= \frac{m^3-m}{3} + m(m+1)$$
$$= \frac{m^3+3m^2+3m-m}{3} = \frac{(m+1)^3-1-m}{3}$$
$$= \frac{(m+1)^3-(m+1)}{3}$$

(iii) $$\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}x^k = \frac{1}{x}\sum_{k=0}^{m}\binom{m+1}{k+1}x^{k+1} = \frac{1}{x}\sum_{k=1}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^k$$
$$= \frac{1}{x}\left[\sum_{k=0}^{m+1}\binom{m+1}{k}x^k - \underbrace{\binom{m+1}{0}x^0}_{1}\right] = \frac{(1+x)^{m+1}-1}{x} = \frac{1-(1+x)^{m+1}}{1-(1+x)} = \sum_{k=0}^{m}(1+x)^k$$

P19 (i) Sean $a,b\in\mathbb{R}$ y $q\in\mathbb{R}\setminus\{1\}$

Calcule $\sum_{k=0}^{m}(a+bk)q^k$ (Suma Hipergeométrica)

(ii) Calcule $\sum_{k=0}^{\infty}kq^k = q+2q^2+3q^3+\dots$ donde $|q|<1$

(Considere que $\lim_{x\to\infty}\frac{a+bx}{c^x}\overset{(*)}{=}0$ si $|c|>1$)

Solución:

(i) $$\sum_{k=0}^{m}(a+bk)q^k \overset{q\neq 1.}{=} \frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{m}(a+bk)q^k(1-q)$$

$$=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{m}(a+bk)(q^k-q^{k+1})=\frac{1}{1-q}\sum_{k=0}^{m}\Big[\underbrace{(a+bk)q^k-(a+b(k+1))q^{k+1}}_{\text{Telescópica}}+\underbrace{bq^{k+1}}_{\text{Geométrica}}\Big]$$

$$=\frac{1}{1-q}\left[a-(a+b(m+1))q^{m+1}+bq\left(\frac{1-q^{m+1}}{1-q}\right)\right]$$

(ii) Ahora si $m\to\infty$ (en la fórmula anterior), como $|q|<1$ tenemos

$$(a+b(m+1))q^{m+1}=\frac{(a+b(m+1))}{\left(\frac{1}{q}\right)^{m+1}}\to 0$$

Por (*) pues $|q|<1\Rightarrow\left|\frac{1}{q}\right|>1$

y $q^{m+1}\to 0$ (Pues $|q|<1$)

$$\Rightarrow\sum_{k=0}^{\infty}(a+bk)q^k=\frac{1}{1-q}\left[a+\frac{bq}{1-q}\right]$$

En particular si $a=0$ y $b=1$, $\sum_{k=0}^{\infty}kq^k=\frac{q}{(1-q)^2}$ ■

P20 Pruebe que $\forall m\in\mathbb{N}$, $S=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i^3+3i^2+2i}<\frac{1}{4}$

(Olimpiada Nacional)

Solución:

Notemos que $i^3+3i^2+2i=i(i^2+3i+2)=i(i+1)(i+2)$

Luego $$S=\sum_{i=1}^{m}\frac{1}{i(i+1)(i+2)}=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\frac{(i+2)-i}{i(i+1)(i+2)}$$

$$=\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{m}\left[\frac{1}{i(i+1)}-\frac{1}{(i+1)(i+2)}\right]=\frac{1}{2}\left[\frac{1}{2}-\frac{1}{(m+1)(m+2)}\right]$$

$$<\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$$ ■

1] Si $s_m = \sum_{k=0}^{m} q^k$ y $S_m = \sum_{k=0}^{m} \left(\frac{1+q}{2}\right)^k$

Pruebe que $\sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i+1} s_i = 2^m S_m \quad (q \neq 1)$

(Olimpiada Matemática de Hungría)

ución: Tenemos que:

$$s_m = \frac{1-q^{m+1}}{1-q} \quad y \quad S_m = \frac{1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{n}}{1-\left(\frac{1+q}{2}\right)} = \frac{2\left(1-\left(\frac{1+q}{2}\right)^{m+1}\right)}{1-q}$$

ora:

$$\sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i+1} s_i = \frac{1}{1-q} \sum_{i=0}^{m} \binom{m+1}{i+1}(1-q^{i+1})$$

$$= \frac{1}{1-q} \sum_{i=1}^{m+1} \binom{m+1}{i}(1-q^i)$$

$$= \frac{1}{1-q} \left[\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i}(1-q^i) - \cancel{\binom{m+1}{0}(1-q^0)}_{\to 0} \right]$$

$$= \frac{1}{1-q} \left[\underbrace{\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i}}_{2^{m+1}} - \underbrace{\sum_{i=0}^{m+1} \binom{m+1}{i} q^i}_{(1+q)^{m+1}} \right]$$

$$= \frac{2^{m+1}}{1-q} \left[1 - \left(\frac{1+q}{2}\right)^{m+1} \right] = 2^m S_m \quad \blacksquare$$

2] Evalue la suma $S = \sum_{k=1}^{2m} (-1)^k \frac{k^2+k+1}{k!}$ (Olimpiada Matemática Canadiense)

olución:

separamos entre pares e impares.

$$= \sum_{i=1}^{m} \cancel{(-1)}^{2i}_{1} \frac{(2i)^2+(2i)+1}{(2i)!} + \sum_{i=1}^{m} \cancel{(-1)}^{2i-1}_{-1} \frac{(2i-1)^2+\cancel{(2i-1)+1}}{(2i-1)!}$$

$$= \underbrace{\cancel{\sum_{i=1}^{m} \frac{(2i)^2}{(2i)!}}}_{\cancel{\frac{2i}{(2i-1)!}}} + \sum_{i=1}^{m} \frac{2i+1}{(2i)!} - \underbrace{\sum_{i=1}^{m} \frac{(2i-1)^2}{(2i-1)!}}_{\frac{2i-1}{(2i-2)!}} - \cancel{\sum_{i=1}^{m} \frac{2i}{(2i-1)!}}$$

$$\sum_{i=1}^{m} \left[\frac{2i+1}{(2i)!} - \frac{2(i-1)+1}{(2(i-1))!} \right] = \frac{2m+1}{(2m)!} - 1 \quad \blacksquare$$

3] Dada $) = \frac{9^x}{9^x+3}$. Evalue la suma (Olimpiada Matemática Canadiense)

$$S = \sum_{k=1}^{2002} f\left(\frac{k}{2003}\right).$$

ución: Sean p, q tal que $p+q=1$

tonces $f(p)+f(q) = \frac{9^p}{9^p+3} + \frac{9^q}{9^q+3} \cdot \frac{1 \cdot 9^p}{1 \cdot 9^p}$

$$= \frac{9^p}{9^p+3} + \frac{9^{p+q}}{9^{p+q}+3\cdot 9^p} = \frac{9^p}{9^p+3} + \frac{9}{9+3\cdot 9^p}$$

$$= \frac{9^p}{9^p+3} + \frac{3}{9^p+3} = \frac{9^p+3}{9^p+3} = 1.$$

Así:

$$\left.\begin{array}{l} f\left(\frac{1}{2003}\right) + f\left(\frac{2002}{2003}\right) = 1 \\ f\left(\frac{2}{2003}\right) + f\left(\frac{2001}{2003}\right) = 1 \\ \quad\vdots \\ + \; f\left(\frac{1001}{2003}\right) + f\left(\frac{1002}{2003}\right) = 1 \end{array}\right\} 1001 \text{ parejas.}$$

$$\Rightarrow S = 1001$$

P24 (i) Pruebe que $\forall m \in \mathbb{R}$

$$\lfloor m \rfloor = \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor$$

donde $\lfloor x \rfloor$ es el entero más grande menor o igual a x.

(ii) Calcule $\sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{\alpha+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$ donde $\alpha \in \mathbb{Z}^+$

(Olimpiada Mundial)

Solución:

(i). Consideremos los 2 casos posibles ($m \in \mathbb{Z}$)

(a) $\lfloor m \rfloor = 2m \Rightarrow m = 2m + \varepsilon$ $\qquad \varepsilon \in [0,1)$

(b) $\lfloor m \rfloor = 2m+1 \Rightarrow m = 2m+1+\varepsilon$

(a) $\Rightarrow \frac{m}{2} = m + \frac{\varepsilon}{2}$ y $\frac{m+1}{2} = m + \frac{\varepsilon+1}{2}$ $\left(\frac{\varepsilon}{2} \in [0, \frac{1}{2})\right.$ y $\left.\frac{1+\varepsilon}{2} \in [0,1)\right)$

$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = m$ y $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = m$

$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = 2m = \lfloor m \rfloor$ //

(b) $\Rightarrow \frac{m}{2} = m + \frac{(1+\varepsilon)}{2}$ y $\frac{m+1}{2} = m+1+\frac{\varepsilon}{2}$

$\Rightarrow \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor = m$ y $\left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = m+1$

$\therefore \left\lfloor \frac{m}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{m+1}{2} \right\rfloor = 2m+1 = \lfloor m \rfloor$

(ii) Por (i), tomando $m = \frac{\alpha}{2^k}$ tenemos

$$\left\lfloor \frac{\alpha}{2^k} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\frac{\alpha}{2^k}+1}{2} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{k+1}} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{\alpha+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{m} \left\lfloor \frac{\alpha+2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \sum_{k=0}^{m} \left\lfloor \frac{\alpha}{2^k} \right\rfloor - \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{k+1}} \right\rfloor = \underbrace{\lfloor \alpha \rfloor}_{\alpha} - \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{m+1}} \right\rfloor = \alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{2^{m+1}} \right\rfloor$$

(Pues $\alpha \in \mathbb{Z}$)

y si $m \to \infty$, $\frac{\alpha}{2^{m+1}} < 1$ para $m \geq m_0$ (m_0 suficientemente grande)

y como $0 < \frac{\alpha}{2^{m+1}} \Rightarrow (\forall m \geq m_0)\ \frac{\alpha}{2^m} \in (0,1)$

$$\Rightarrow \left\lfloor \frac{\alpha}{2^m} \right\rfloor = 0 \quad \forall m \geq m_0$$

$$\Rightarrow \sum_{k=0}^{\infty} \left\lfloor \frac{\alpha + 2^k}{2^{k+1}} \right\rfloor = \lim_{m\to\infty} \left(\alpha - \left\lfloor \frac{\alpha}{2^m} \right\rfloor \right) = \alpha \ \blacksquare$$

P25 (a) Pruebe que $(\forall m \geq 1)(\forall j \geq 0)$

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{i+j-1}{j} = \binom{m+j}{j+1}$$ (Use inducción sobre m) (Control 1, 1992)

(b) Concluya que para $k \geq 2$

$$\sum_{m_2=1}^{m_1} \sum_{m_3=1}^{m_2} \cdots \sum_{m_i=1}^{m_{i-1}} \cdots \sum_{m_k=1}^{m_{k-1}} 1 = \binom{m_1+k-2}{k-1}$$ (Control 1, 1992)

Solución:

(a) Para $m=1$, $\sum_{i=1}^{1} \binom{i+j-1}{j} = \binom{j}{j} = 1$

y $\binom{m+j}{j+1} = \binom{1+j}{j+1} = 1$ y por lo tanto la igualdad se cumple.

Supongamos cierta la igualdad para algún m y $\forall j \geq 0$ (con ese m) y probemos lo mismo para $m+1$.

En efecto $\sum_{i=1}^{m+1} \binom{i+j-1}{j} = \left[\sum_{i=1}^{m} \binom{i+j-1}{j} \right] + \binom{(m+1)+j-1}{j}$

Por hipótesis $= \binom{m+j}{j+1} + \binom{m+j}{j} = \binom{m+j+1}{j+1}$

$$= \binom{(m+1)+j}{j+1} \ \blacksquare$$

(b) Sabemos que (a) se cumple para $j = 0, 1, 2, \ldots$ o sea

$$\sum_{i=1}^{m} \binom{i-1}{0} \overset{(1)}{=} \binom{m}{1}, \quad \sum_{i=1}^{m} \binom{i}{1} \overset{(2)}{=} \binom{m+1}{2}, \quad \sum_{i=1}^{m} \binom{i+1}{2} \overset{(3)}{=} \binom{m+2}{3} \ \ldots$$

Así: $$\sum_{m_2=1}^{m_1} \sum_{m_3=1}^{m_2} \cdots \sum_{m_{k-2}=1}^{m_{k-3}} \sum_{m_{k-1}=1}^{m_{k-2}} \underbrace{\sum_{m_k=1}^{m_{k-1}} \binom{m_k-1}{0}}_{\binom{m_{k-1}}{1}}$$ ← Forma creativa escribir el 1

$\binom{m_{k-1}}{1}$ ← Por (1)

$$\underbrace{\qquad}_{\binom{m_{k-2}+1}{2}}$$

$$\underbrace{\qquad}_{\binom{m_{k-3}+2}{3}}$$

$$\cdots \underbrace{\qquad}_{\binom{m_{k-(k-1)}+(k-2)}{k-1}} = \binom{m_1+k-2}{k-1} \ \blacksquare$$

P26 Sea $(b_m)_{m \in \mathbb{N}}$ una secuencia de términos positivos definida por la recurrencia

$$b_k = \sqrt{b_{k-1}} + 2\left(1 - \sqrt{1+\sqrt{b_{k-1}}}\right) \quad \forall k \geq 1.$$
$$b_0 = 1.$$

Calcule el valor de $\sum_{k=1}^{m} b_k 2^k$. (Olimpiada Mundial Universitaria)

(21)

Solución:

Definamos $a_k = 1 + \sqrt{b_k}$ con $a_0 = 1 + \sqrt{b_0} = 2$

Notamos además que:

$$b_k = \left(\sqrt{1+\sqrt{b_{k-1}}} - 1\right)^2 \text{ de la recurrencia}$$

$\sqrt{x^2} = |x|$ $\sqrt{b_k} = \left|\sqrt{1+\sqrt{b_{k-1}}} - 1\right| = \sqrt{1+\sqrt{b_{k-1}}} - 1$ pues $\sqrt{1+\sqrt{b_{k-1}}} > 1$

$$\Rightarrow 1 + \sqrt{b_k} = \sqrt{1+\sqrt{b_{k-1}}} \Rightarrow a_k = \sqrt{a_{k-1}} = (a_{k-1})^{1/2}$$

$$a_0 = 2 \Rightarrow a_1 = a_0^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2}} \Rightarrow a_2 = (2^{\frac{1}{2}})^{\frac{1}{2}} = 2^{\frac{1}{2^2}} \Rightarrow a_3 = 2^{1/2^3}$$
$$\Rightarrow \dots \Rightarrow a_m = 2^{1/2^m} = 2^{2^{-m}}$$

Finalmente: $\sum_{k=1}^{m} b_k 2^k = \sum_{k=1}^{m} (a_k - 1)^2 2^k = \sum_{k=1}^{m} (\underbrace{a_k^2}_{a_{k-1}} - 2a_k + 1) 2^k$

pues $a_k = 1 + \sqrt{b_k}$

$$= \sum \Big[\underbrace{(a_{k-1}2^k - a_k 2^{k+1})}_{\text{Telescópica}} + \underbrace{2^k}_{\text{Geométrica}}\Big] = \underbrace{a_0}_{2} \cdot 2^1 - a_m 2^{m+1} + \left(\frac{1-2^m}{1-2}\right) 2$$
$$= 4 - 2^{2^{-m}} 2^{m+1} + 2^{m+1} - 2$$
$$= 2 + 2^{m+1}\left(1 - 2^{2^{-m}}\right) \blacksquare$$

Para poder tener la guía lista el lunes (para que ustedes le saquen copia del martes en adelante "trasnoché" el día Domingo y ahora estoy muy cansado, pero a la vez muy satisfec por el buen trabajo realizado por y para ustedes. Les cuent que además pronto saldrá la guía de relaciones, con mas inducci y algo de cardinalidad. Finalmente debo decir que esta guía va dedicada a una persona muy especial para mi, gracias a esa jovencita volví a recuperar la alegría de vivir y ahora soy una persona nueva, feliz y con mas ganas que nunca de seguir con mi sección... gracias Magdalena por hacerme reir y por alejarme de mis tristezas, por brindarme una linda amistad... Gracias por escucharme, gracias por confiar en mi y "gracias" por "hacerme sentir importante". Ahora serás famosa, pero no por mi sino porque ahora todo 1er Año sabe la grandiosa persona que tu eres...

Con mucho
cariño
David.