



### Control 3

**P1.** (a) (3,0 ptos.) Demuestre que

$$(\forall n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \quad 5^{2n} + (-1)^{n+1} \text{ es divisible por } 13.$$

(b) (3,0 ptos.) Demuestre que,  $\forall n \geq 1$ ,

$$\sum_{k=1}^n \frac{1}{k^2} = 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \dots + \frac{1}{n^2} \geq \frac{3}{2} - \frac{1}{n+1}$$

**P2.** (a) Se define en  $\mathbb{R}$  la relación  $\Psi$  por

$$x\Psi y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{N} \cup \{0\}) \text{ tal que } y - x = n.$$

(i) (2,0 ptos.) Demuestre que  $\Psi$  es una relación de orden.

(ii) (1,0 ptos.) Indique si es una relación de orden parcial o total. Justifique.

(b) Considere ahora la relación  $\Phi$  definida en  $\mathbb{R}$  por

$$x\Phi y \Leftrightarrow (\exists n \in \mathbb{Z}) \text{ tal que } y - x = n.$$

(i) (2,0 ptos.) Demuestre que  $\Phi$  es una relación de equivalencia.

(ii) (1,0 ptos.) Dado  $p \in \mathbb{Z}$ , calcule la clase de equivalencia  $[p]_{\Phi}$ .

Consultas sólo al auxiliar  
Justifique cada uno de sus pasos  
Tiempo: 1:15