10. Semana 9

P1 Notemos que como $x_2, x_3 \in \mathbb{N}$, necesariamente $x_1 \in \mathbb{Z}$, esto porque la suma de los tres debe dar un número natural, entonces E puede ser descrito como el siguiente conjunto $E = \{x = (x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^2 / \exists n \in \mathbb{N}, x_1 + x_2 + x_3 = n\}$, se deduce que $E \subseteq \mathbb{Z} \times \mathbb{N}^2 \Rightarrow |E| \leq |\mathbb{Z} \times \mathbb{N}^2| = |\mathbb{N}|$, además si fijamos x_1, x_2, digamos en 0, existirá una tupla $(0, 0, n)$ para cada natural n, con lo cual podemos deducir que el conjunto es infinito ($|\mathbb{N}| \leq |E|$), juntando ambas desigualdades se tiene que $|E| = |\mathbb{N}|$.

P2 **(a)** Dividiremos A en varios subconjuntos, si vemos que si encontramos al menos uno de ellos que no sea numerable entonces la unión en su totalidad tampoco será numerable, para esto fijemos $n = 1$ y $x_3 = 0$ con esto obtenemos un subconjunto de A, llamémoslo A_1, descrito de la siguiente manera $A_1 = \{x = (x_1, x_2, 0) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = 1\}$ Podemos establecer la siguiente función biyectiva $f : \mathbb{R} \times \{0\} \to A_1$ $f(x, y) = (x, 1 - x, y)$, dicha función se puede ver como la unión de 3 funciones distintas $f_1(x) = x$, $f_2(x) = 1 - x$ y $f_3(y) = y$, cada una de estas funciones es biyectiva, luego f es biyectiva, se concluye que $|A_1| = |\mathbb{R}|$ y, por lo tanto, A es no numerable.

(b) Dividiremos $\mathcal{T}$ en varios subconjuntos, si vemos que si encontramos al menos uno de ellos que no sea numerable entonces la unión en su totalidad tampoco será numerable, si T es un triángulo, se puede representar como 3 puntos o vértices en el plano cartesiano $(x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3)$, fijemos 2 de ellos, y una componente del último vértice, el primero en (0,0) y el segundo en (1,0), y la coordenada x del tercer vértice en 0, con esto encontramos un nuevo conjunto T' subconjunto de $\mathcal{T}$ de triángulos tales que 2 de sus vértices están fijos en (0,0) y (1,0) y el tercer vértice está libre solamente en la coordenada y, pero no puede valer 0 ya que de ser así no sería un triángulo. Establecemos entonces la siguiente biyección $f : T' \to \mathbb{R} \backslash \{0\}$ $f(t) = y$, donde a cada triángulo se le asocia la coordenada y del tercer vértice del triángulo, claramente esta función es biyectiva (los triángulos en este conjunto se diferencian únicamente por su coordenada y del tercer punto, luego es inyectivo, y para cada valor real y distinto de 0 en el eje OY existirá un triángulo cuya ordenada del tercer vértice toma ese y, con esto es epiyectiva, luego $|\mathbb{R} \backslash \{0\}| = |T'| = |\mathcal{T}| = |\mathbb{R}|$.

P3 Si una recta no vertical pasa por (0,1) entonces es de la forma $l : y = mx + 1$, con $m \in \mathbb{R}$. Si llamamos L al conjunto de todas estas rectas, entonces se puede describir de la siguiente manera $L : \{y = mx + 1 / m \in \mathbb{R}\}$. Podemos entonces establecer la siguiente función $f : L \to \mathbb{R}$ $f(l_1) = m$, es decir, que a cada recta le asocio su pendiente. Es inyectiva ya que las rectas en este conjunto se diferencian justamente por su pendiente (si dos rectas tienen distinto m, son distintas entre si), además es sobreyectiva ya que para cada $m \in \mathbb{R}$ basta tomar la recta que tenga a m como pendiente. Como es biyectiva se concluye que $|L| = |\mathbb{R}|$ y, por lo tanto, no es numerable.

P4 **(a)** Razonemos por contradicción, supongamos que $A \backslash B$ es numerable, luego $A \backslash B \cup B$ es numerable por ser unión finita de numerables, pero

$$\begin{aligned} A\backslash B \cup B &= (A \cap B^c) \cup B \\ &= (A \cup B) \cap (B^c \cup B) \\ &= (A \cup B) \cap U \\ &= A \cup B \\ &= A \qquad \backslash \text{ya que } B \subseteq A \end{aligned}$$

Esto quiere decir que A es numerable, lo que es una contradicción, se concluye que $A\backslash B$ es no numerable.

(b) Usando lo anterior sabemos que $\mathbb{R}$ es no numerable y $\mathbb{Q}$ es numerable ($\mathbb{Q} \subseteq \mathbb{R}$), luego $\mathbb{R}\backslash\mathbb{Q} = \mathbb{I}$ es no numerable.

P5 **(a)** $(\mathcal{F}, *)$ es estructura algebraica si obedece la ley de composición interna. Sean $f, g \in \mathcal{F}$ se tiene que $f \circ g$ es biyectiva por ser composición de funciones biyectivas, además $(f \circ g)^{-1}$ es biyectiva ya que la inversa de una función biyectiva, es biyectiva. Se concluye que $(f \circ g)^{-1} = f * g \in \mathcal{F}$, luego cumple la ley de composición interna y, por lo tanto, es una estructura algebraica.

(b) Estudiemos $(f * g) * h$ y $f * (g * h)$

$$(f * g) * h = (f \circ g)^{-1} * h = ((f \circ g)^{-1} \circ h)^{-1} = h^{-1} \circ ((f \circ g)^{-1})^{-1} = h^{-1} \circ (f \circ g).$$

$$f * (g * h) = f * (g \circ h)^{-1} = (f \circ (g \circ h)^{-1})^{-1} = ((g \circ h)^{-1})^{-1} \circ f^{-1} = (g \circ h) \circ f^{-1}.$$

Pero $h^{-1} \circ (f \circ g) \neq (g \circ h) \circ f^{-1}$ se concluye que esta estrucura no es asociativa. Para convencerse tomemos 3 funciones cualesquiera, por ejemplo, $f(x) = x^2, f^{-1}(x) = \sqrt{x}$, $g(x) = \sin(x)$ y $h(x) = e^x, h^{-1}(x) = \ln(x)$, luego $h^{-1} \circ (f \circ g) = \ln(\sin^2(x))$, pero $(g \circ h) \circ f^{-1} = \sin(e^{\sqrt{x}})$, las cuales son claramente distintas entre sí.

(c) Si existiese neutro e debe cumplir que $(\forall f \in \mathcal{F})\ f * e = f$, pero

$$\begin{aligned} f * e &= f \\ (f \circ e)^{-1} &= f \qquad \backslash \text{tomando inverso a ambos lados } ()^{-1} \\ f \circ e &= f^{-1} \qquad \backslash \text{componiendo con la inversa de } f \text{ por la izquierda } f^{-1}\circ \\ (f^{-1} \circ f) \circ e &= f^{-1} \circ f^{-1} \qquad \backslash \text{por asociatividad} \\ id_A \circ e &= f^{-2} \\ e &= f^{-2} \end{aligned}$$

Sin embargo se observa que este neutro e depende de la función f elegida, se concluye que no existe neutro ya que debe ser único e igual para todos.

(d) Como no tiene neutro, tampoco existirá un inverso.

(e) Son idempotentes aquellos elementos en $\mathcal{F}$ tales que $f * f = f$, trabajando un poco la expresión se tiene que

$$\begin{aligned} f * f &= f \\ (f \circ f)^{-1} &= f \qquad \backslash\text{tomando inverso a ambos lados } ()^{-1} \\ f \circ f &= f^{-1} \qquad \backslash\text{componiendo con } f \text{ por la izquierda } f \circ \\ f \circ f^2 &= f \circ f^{-1} \\ f^3 &= id_A \end{aligned}$$

Es decir, los elementos idempotentes en $\mathcal{F}$ son aquellas funciones biyectivas que si se componen consigo mismo 3 veces resulta la identidad.

P6 **(a)** Si tomamos $a \in [x]_{\mathcal{R}}$ y $b \in [y]_{\mathcal{R}}$, esto quiere decir que $a\mathcal{R}x$ y $b\mathcal{R}y$, pero por hipótesis esto implica que $(a * b)\mathcal{R}(x * y)$ es decir $(a * b) \in [x * y]_{\mathcal{R}}$, como se puede observar tomamos elementos arbitrarios de ambas clases de equivalencia y el resultado fue que la operación está bien definida ya que no depende de los representantes escogidos.

(b) Se debe encontrar una clase de equivalencia $m \in E/\mathcal{R}$ tal que $[x]_{\mathcal{R}} \otimes m = [x]_{\mathcal{R}}$, dado que en E hay un neutro e, podemos tomar su clase de equivalencia, luego $m = [e]_{\mathcal{R}}$, con esto se tiene que $[x]_{\mathcal{R}} \otimes [e]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}} \otimes [x]_{\mathcal{R}} = [x * e]_{\mathcal{R}} = [e * x]_{\mathcal{R}} = [x]_{\mathcal{R}}$. Se concluye que $[e]_{\mathcal{R}}$ es el neutro para $E/\mathcal{R}$.

(c) Se debe encontrar una clase de equivalencia $m \in E/\mathcal{R}$ tal que $[x]_{\mathcal{R}} \oplus m = [e]_{\mathcal{R}}$, dado $x \in E$ como existe inverso x^{-1}, podemos tomar su clase de equivalencia, luego $m = [x^{-1}]_{\mathcal{R}}$, con esto se tiene que $[x]_{\mathcal{R}} \otimes [x^{-1}]_{\mathcal{R}} = [x^{-1}]_{\mathcal{R}} \otimes [x]_{\mathcal{R}} = [x * x^{-1}]_{\mathcal{R}} = [x^{-1} * x]_{\mathcal{R}} = [e]_{\mathcal{R}}$. Se concluye que $[x^{-1}]_{\mathcal{R}}$ es el inverso para $E/\mathcal{R}$.