P1 | I) $(P(E), \cap)$

neutro: es el "e" que cumple $x \cap e = e \cap x = x$
luego si tomamos $X = E$ (que vendría siendo el universo)

$$\Rightarrow X \overset{(1)}{\cap} E = E \overset{(2)}{\cap} X = X$$ ← OJO! A PRIORI HAY QUE REVISAR (1) Y (2)

$\Rightarrow$ E es el neutro

OBS: EL NEUTRO DEBE SER EL MISMO PARA TODOS.

absorvente: es el "a" tq $\forall x$, $x \cap a = a \cap x = a$
luego si tomamos $X = \phi$

$$\Rightarrow x \cap \phi = \phi \cap x = \phi \quad \forall x$$

$\Rightarrow$ ϕ es el absorvente.

Es sabido que $A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$
$\Rightarrow$ $\cap$ es asociativa.

Es sabido que $A \cap B = B \cap A$
$\Rightarrow$ $\cap$ es conmutativa

Obs: si yo hubiese visto primero que la intersección es conmutativa hubiese bastado que $X \cap E = X$ $\forall x$ para decir que E es el neutro (análogo para abs).

(análogo para abs)

II) $(\mathbb{N} \cup \{+\infty\}, \text{máx})$

Veamos primero que es conmutativo

$$\text{máx}(x,y) = \text{máx}(y,x)$$

sí pues máx devuelve el más grande, no le importa el orden.

neutro: $\text{máx}(x,0) = x \quad \forall x$ pues el 0 es el más chico, nunca le va a ganar a nadie a lo más empata consigomismo. $\Rightarrow$ 0 es el neutro absorvente: ¿Hay alguien que le gane a todos?

$\exists y : \max\{x, y\} = y \quad \forall x$?

SÍ El ∞! $\max\{+\infty, x\} = +\infty$

¿Porqué puedo tomar el infinito si eso no es un número?
Porque tu conjunto es $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$

EL $+\infty$ AHORA ES UN ELEMENTO

★ obs: $(\mathbb{N}, \max)$ NO TIENE ELTO. ABSORVENTE.

ASOCIATIVIDAD:

¿ $\max\{x, \max\{y, z\}\} = \max\{\max\{x, y\}, z\}$

sí pues sea a tq

$a = \max\{x, \max\{y, z\}\}$

$\Rightarrow a \geq x \quad \wedge \quad a \geq \max(y, z)$
$\Rightarrow a \geq y \quad \wedge \quad a \geq z$

$$\Rightarrow \underbrace{\underbrace{a \geq x \quad \wedge \quad a \geq y}_{a \geq \max\{x, y\}} \quad \wedge \quad a \geq z}_{a \geq \max\{\max\{x, y\}, z\}}$$

obs: si te marea ver máx $\{max\{\dots\}\dots\}$ puedes decir

$$x * y = \max\{x,y\}$$

asosciativo seria $\underbrace{(x * y)} * z = x * (y * z)$

$$= \max\{x,y\} * z$$
$$= \max\{\max\{x,y\}, z\}$$

$$x * \max\{y,z\}$$
$$= \max\{x, \max\{y,z\}\}$$

$(\{Piedra, Papel, Tijera\}, \star)$

neutro

¿Hay alguien que pierda o empate con todos? NO, pues es un ciclo

$\Rightarrow$ No hay neutro

¿Pero porque preguntaste si había alguien que pierda si $\star$ dice el que gana?
Precisamente ser neutro es que

$$\exists y : \quad y \star x = x \quad \forall x$$

cualquier x le tiene que ganar o empatar a y
$\Rightarrow$ y debe perder o empatar con todos

¿Ah pero el papel le gana a la ~~tijera~~ piedra y la tijera al papel y la piedra a la tijera, todos le ganan a alguien?
YA PERO CUALQUIER x le tiene que ganar

absorvente: usando el mismo argumento
NO HAY ELEMENTO ABSORVENTE, NO HAY NADIE QUE LE GANE O EMPATE A TODOS

ASOSCIATIVIDAD:

$$\text{piedra} \star \underbrace{(\text{papel} \star \text{tijera})} = \underbrace{(\text{piedra} \star \text{papel})} \star \text{tijera}$$

$$\underbrace{\text{piedra} \star \text{tijera}} = \underbrace{\text{papel} \star \text{tijera}}$$

$$\text{piedra} = \text{tijera}$$

CLARAMENTE NO!

$\Rightarrow$ NO ASOCIATIVA.

<u>Obs</u>: Cualquier conjunto "ciclo" NO TIENE NEUTRO NI ABSORVENTE NI ES ASOCIATIVO, demuestrenlo!

Claramente sí ES CONMUTATIVA
PORQUE NO importa EL ORDEN

TIJERA ☆ PAPEL = PAPEL ☆ TIJERA
(y así con todas las combinaciones)

P2 a) • CONMUTATIVIDAD $\Leftrightarrow$ $(a,b)*(c,d) = (c,d)*(a,b)$

veamos si $*$ es conmutativo:

$\rightarrow (a,b)*(c,d) = (ac, bc+d)$
$\rightarrow (c,d)*(a,b) = (ca, da+b)$

son diferentes!!

$\therefore$ $*$ **NO** es conmutativo

• asociatividad $\Leftrightarrow$ $[(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (a*b)*[(c,d)*(e,f)]$

veamos si $*$ es asociativo:

$\rightarrow [(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (ac, bc+d)*(e,f)$

$= (ace, (bc+d)e+f) = (ace, bce+de+f)$

usando sólo la definición del enunciado

$\rightarrow (a,b)*[(c,d)*(e,f)] = (a,b)*(ce, de+f)$

$= (ace, bce+de+f)$

¡SON IGUALES!

$\therefore [(a,b)*(c,d)]*(e,f) = (a,b)*[(c,d)*(e,f)]$

$\therefore$ $*$ es asociativo //.

b) EL neutro es alguien (llamémoslo "(e_1, e_2)")

que cumple que

$$(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b) \quad \forall (a,b) \in \mathbb{R}^2$$
$$y \quad (e_1, e_2) * (a,b) = (a,b)$$

es decir, es como si no se hubiese "asterisqueado" por el.

Entonces: 1 primero necesitamos (e_1, e_2) tal que

$$(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b)$$

$$\Leftrightarrow \quad (ae_1, be_1 + e_2) = (a,b)$$

$$\Rightarrow ae_1 = a \quad \wedge \quad be_1 + e_2 = b$$

$$\downarrow$$

$$e_1 = 1$$

$$\Rightarrow b + e_2 = b$$

$$\downarrow$$

$$e_2 = 0$$

veamos si se cumplen las 2 condiciones:

$(e_1, e_2) * (a,b) = (1,0) * (a,b) = (1a, 0 \cdot a + b) = (a,b)$ //

$(a,b) * (e_1, e_2) = (a,b) * (1,0) = (a \cdot 1, b \cdot 1 + 0) = (a,b)$ //

$\therefore (1,0)$ es el neutro en $(\mathbb{R}^2, *)$.

c) Los elementos invertibles son aquellos para los cuales $\exists (a,b)^{-1}$ tal que

$$(a,b) * (a,b)^{-1} = (e_1, e_2) \swarrow \text{neutro}$$

ya vimos que el neutro es $(1,0)$, entonces tenemos que ver para qué pares $(a,b) \in \mathbb{R}^2$ $\exists (a,b)^{-1}$ tal que

$$(a,b) * (a,b)^{-1} = (1,0).$$

En efecto: llamemos (x,y) a $(a,b)^{-1}$

$(a,b) * (x,y) = (1,0)$

$\Leftrightarrow (ax, bx+y) = (1,0)$

$\Rightarrow ax = 1 \quad \wedge \quad bx + y = 0$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$x = \frac{1}{a} \qquad y = -bx = \frac{-b}{a}$

$\therefore$ si existe $(a,b)^{-1}$, $(a,b)^{-1} = \left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)$

Pero para quienes existe? o más bien para quienes no? Solo tendríamos problemas si $a = 0$

$\therefore$ todos los pares (a,b) con $a \neq 0$ tienen inverso y vale $\left(\frac{1}{a}, \frac{-b}{a}\right)$ //

d) Los elementos idempotentes son aquellos que cumplen que $(a,b)*(a,b) = (a,b)$

Veamos quienes son: $(a,b)*(a,b) = (a,b)$

$\Leftrightarrow (a^2, ab+b) = (a,b)$

$\Rightarrow a^2 = a \quad \wedge \quad ab+b = b$

$\downarrow \qquad\qquad \downarrow$

$a = 1$ (único elemento idempotente en $\mathbb{R}$ con la multiplicación)

$b+b = b$

$2b = b$

$b = 0$

$\therefore$ el único elemento idempotente es el neutro $(1,0)$. //

(*) Notemos que el neutro siempre es idempotente ya que cumple que $(a,b)*(e_1,e_2) = (a,b)$

PARA TODO (a,b), en particular para (e_1,e_2)

$\Rightarrow (e_1,e_2)*(e_1,e_2) = (e_1,e_2)$.

un pequeño error

También se cumple para $a=0$ que
$a^2 = a$

En ese caso $ab + b$
$= 0b + b$
$= b$

es decir para cualquier b
se cumple la idempotencia si $a=0$
en otras palabras

$$x \text{ idempotente} \iff \begin{cases} x = (1,0) \\ \vee \\ x = (0,b) \text{ con } b \in \mathbb{R} \end{cases}$$

//

P3) $B = \{x \in A \mid a * x = x * a\}$ $a \in A$ fijo

a) P.D.Q: $(\forall x, y \in B)$ $x * y \in B$

P.D.Q $(x*y)*a = a*(x*y)$ $\forall x, y \in B$

En efecto: $(x*y)*a = x*(y*a)$ (pq' $*$ es asociativo)

$= x*(a*y)$ (pq' $y \in B$)

$= (x*a)*y$ (pq' $*$ asocia)

$= (a*x)*y$ (pq' $x \in B$)

$= a*(x*y)$ (pq' $*$ asocia)

//

b) P.D.Q: si e es neutro $\Rightarrow e \in B$

En efecto: si e es neutro

$e*x = x \wedge x*e = x$ $\forall x$ definición neutro

en particular $e*a = a \wedge a*e = a$

$\Rightarrow e*a = a*e$

$\Rightarrow e \in B$ //

c) P.D.Q $x \in B$ tiene inverso $\Rightarrow x^{-1} \in B$

En efecto: $x \in B$ tiene inverso

$$\Leftrightarrow \exists x^{-1} \text{ tq } \begin{cases} x * x^{-1} = e \\ x^{-1} * x = e \end{cases}$$

P.D.Q $x^{-1} \in B$

$$\Leftrightarrow x^{-1} * a = a * x^{-1}$$

En efecto: $x^{-1} * a = (x^{-1} * a) * e$ ← el neutro no hace nada

$= x^{-1} * (a * e)$ ← $*$ asocia

$= x^{-1} * (a * (x * x^{-1}))$ ← $e = x^{-1} * x$

$= x^{-1} * ((a * x) * x^{-1})$ ← $*$ asocia

$= x^{-1} * ((x * a) * x^{-1})$ ← $x \in B$

$= (x^{-1} * x) * (a * x^{-1})$ ← $*$ asocia

$= e * (a * x^{-1})$ ← $e = x^{-1} * x$

$= a * x^{-1}$ ← el neutro "no hace nada"

$\therefore x^{-1} * a = a * x^{-1}$

$\therefore x^{-1} \in B$ //

P4)

Practicamente lo único que sabemos de NO-NUMERABILIDAD ES:

$\mathbb{R}$ NO ES NUMERABLE
$[0,1)$ NO ES NUMERABLE

ASIQUE HABRA QUE USAR ESO...

NOTEMOS QUE $(a,b) \subseteq \mathbb{R}$
$\Rightarrow |(a,b)| \leq |\mathbb{R}|$

solo faltaria ver que $|\mathbb{R}| \leq |(a,b)|$

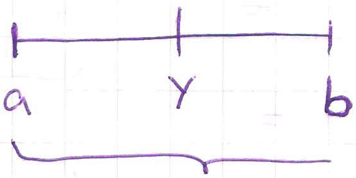
PDQ: $\exists f: \mathbb{R} \to (a,b)$ inyectiva.

pero eso es complicado... quizas si en vez de $\mathbb{R}$ trabajamos con $[0,1)$

PDQ $\exists f: [0,1) \to (a,b)$ inyectiva.

EL SIGUIENTE ARGUMENTO ES UN ARGUMENTO QUE LES JURO VOLVERÁN A USAR MUCHAS VECES EN LA UNIVERSIDAD.

¿Como puedo describir un elemento de un intervalo?



este segmento mide $b-a$
cual quier elemento que este entremedio es de la forma $Y = a + z$
con $0 < z < b-a$

y una forma de escribir

$0 < z < b-a$ es $z = x(b-a)$ con $x \in [0,1]$

what! piensalo si yo soy más chico que $b-a$ es porque soy ALGUNA FRACCIÓN de $b-a$ (LA MITAD, UN TERCIO, SIETE OCTAVOS, algo menor que 1)

¿$2 < 4$? sí pues $2 = \frac{1}{2} \cdot 2$

¿$7 < 10$? sí pues $7 = 10 \cdot \frac{7}{10}$

así $f: [0,1) \to (a,b)$
$x \longrightarrow a + x(b-a)$
ESTÁ BIEN DEFINIDA! !!

No! pues $x=0 \longrightarrow a + 0(b-a) = a$ que NO PERTENECE A (a,b). HAY QUE TENER OJO CON ESOS DETALLES.

pero si $[0,1)$ es no-numerable $(0,1)$ tampoco es numerable si es lo mismo sin un elemento

$f: (0,1) \to (a,b)$
$x \to a + x(b-a)$
AHORA SÍ ESTÁ BIEN DEFINIDA, SI ES INYECTIVA GANAMOS.

$f(x) = f(y) \Rightarrow \cancel{a} + x(\cancel{b-a}) = \cancel{a} + y(\cancel{b-a})$ $\boxed{x = y}$

$\therefore$ f inyectiva.

$\Rightarrow |(0,1)| = |[0,1)| = |\mathbb{R}| \leq |(a,b)| \leq |\mathbb{R}|$

$\Rightarrow |(a,b)| = |\mathbb{R}|$ //

b) Como $A = \bigcup_{i \in \mathbb{N}} A_i$

$\uparrow$

unión numerable

si todos los A_i fuesen numerables o finitos tendría • unión numerable de conjuntos numerables lo que es numerable pero A es no-numerable

$\Rightarrow$ Alguno no es numerable
$\Rightarrow \exists k \in \mathbb{N}$ tq A_k es infinito no-numerable.

• = A lo más

c) $\{0,1\}^{\mathbb{N}} = \{0,1\} \times \{0,1\} \times \cdots \times \{0,1\}$

$\Rightarrow$ sus elementos son de la forma

$(0, 1, 0, 0, 0, 1, \ldots\ldots)$
todas las posiciones tienen un 0 o un 1

si $\{0,1\}^{\mathbb{N}}$ fuese numerable uno podría armar una "lista" con todos los elementos

$1 = (0, \ldots\ldots\ldots, 0, \ldots, 1, \ldots 0, \ldots)$
$2 = (0, 1, \ldots\ldots\ldots, 1, 1, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots)$
$3 = (1, 0, 1, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots)$

Y así infinitamente, pero yo puedo armar un ~~ca~~ número que no esté en esa lista.

Como el 1^er número tiene un 0 en la primera posición mi nuevo número tiene un 1, como el segundo tiene un 1 en la segunda el nuevo tendrá un 0 y así sucesivamente

¿Y por qué ese elemento no va a estar si mi lista es infinita?

a ver claramente no es el primero porque el primero tiene un 0 en la primera posición y esto tiene un 1, y tampoco es el 2do porque el segundo tiene un 1 en la segunda posición y este tiene un 0, ah entonces... y así uno ve que no es el 3ro ni el 4to ni ninguno!

mentira sí es el i-ésimo ¿seguro?, porque el i-ésimo tiene un 0 (o bien un 1) en la i-ésima posición y este ~~es~~ tiene un 1 (o bien un 0) entonces parece que es verdad que no está en la lista...

$\Rightarrow \{0,1\}^{\mathbb{N}}$ NO ES NUMERABLE.