

Control 6

P1. a) En \mathbb{Z}^2 se definen las siguientes leyes de composición interna: $\forall (a, b), (c, d) \in \mathbb{Z}^2$

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

$$(a, b) \odot (c, d) = (ac, 0).$$

Sabiendo que (\mathbb{Z}^2, \oplus) es grupo abeliano (no lo demuestre)

(i) (1,5 pts.) Verifique que $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ es un anillo conmutativo.

(ii) (1,5 pts.) Averigüe si $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ tiene unidad y/o divisores de cero. ¿Es $(\mathbb{Z}^2, \oplus, \odot)$ cuerpo? Justifique.

b) Sea $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ un cuerpo de orden 3 ($|\mathbb{K}| = 3$).

(i) (2,0 pts.) Construya las tablas para las operaciones $+$ y \cdot , justificando su respuesta.

(ii) (1,0 pts.) Encuentre un isomorfismo f entre $(\mathbb{K}, +, \cdot)$ y $(\mathbb{Z}_3, +_3, \cdot_3)$, explicitando las asignaciones de f .

P2. a) (3,0 pts.) Sea $z \in \mathbb{C}$ tal que $|z| > 1$ e $\text{Im}(z) > 0$. Demuestre que

$$\text{Im}\left(z + \frac{1}{z}\right) > 0.$$

b) (3,0 pts.) Si z_1 y z_2 son las soluciones de la ecuación

$$z^2 - 2z + 2 = 0,$$

demuestre (sin usar inducción) que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall \theta \in \mathbb{R}, \theta \neq k\pi, k \in \mathbb{Z}$,

$$\frac{(\cot(\theta) + z_1 - 1)^n - (\cot(\theta) + z_2 - 1)^n}{z_1 - z_2} = \sin(n\theta)(\text{cosec}(\theta))^n.$$

13 de junio de 2009
Sin consultas
Tiempo: 1:15 hrs.