

Introducción al Álgebra

Control 5 Parte Problemas 1

a) $(H \times K, \circ)$ es grupo abeliano

- Asociatividad: $\forall (h_1, k_1), (h_2, k_2), (h_3, k_3) \in H \times K$ se tiene
 $(h_1, k_1) \circ [(h_2, k_2) \circ (h_3, k_3)] = (h_1, k_1) \circ (h_2 * h_3, k_2 \Delta k_3) = (h_1 * (h_2 * h_3), k_1 \Delta (k_2 \Delta k_3))$
 $= ((h_1 * h_2) * h_3, (k_1 \Delta k_2) \Delta k_3) = (h_1 * h_2, k_1 \Delta k_2) \circ (h_3, k_3)$ pues $*$ y Δ asocian en H y K respect.
 $\xrightarrow{1.0} = [(h_1, k_1) \circ (h_2, k_2)] \circ (h_3, k_3)$

- Neutro: Es inmediato que (e_H, e_K) es neutro en $H \times K$ pues

0.5 $(h, k) \circ (e_H, e_K) = (h * e_H, k \Delta e_K) = (h, k) = (e_H, e_K) \circ (h, k) \quad \forall (h, k) \in H \times K$

- Inversos: $\forall (h, k) \in H \times K \exists (h^{-1}, k^{-1}) \in H \times K$ tal que

$$(h, k) \circ (h^{-1}, k^{-1}) = (h * h^{-1}, k \Delta k^{-1}) = (e_H, e_K) = (h^{-1}, k^{-1}) \circ (h, k)$$

con h^{-1} y k^{-1} inversos en H y K Sigue que $(H \times K, \circ)$ es grupo \rightarrow 0.5

b) (b1) Sean $h_1, h_2, t_1, t_2 \in L$, es decir $h_1, t_1 \in H_1$ y $h_2, t_2 \in H_2$

Usando la propiedad respecto formamos $(h_1 * h_2) * (t_1 * t_2)^{-1} =$

$$= (h_1 * h_2) * (t_2^{-1} * t_1^{-1}) = h_1 * (h_2 * t_2^{-1}) * t_1^{-1} = \underbrace{(h_1 * t_1^{-1})}_{\text{asociando}} * \underbrace{(h_2 * t_2^{-1})}_{\text{por conmutatividad}}$$

donde $h_1 * t_1^{-1} \in H_1$ y $h_2 * t_2^{-1} \in H_2$ pues $(H_1, *)$ y $(H_2, *)$ son

subgrupos de $(G, *)$. Sigue que $(h_1 * h_2) * (t_1 * t_2)^{-1} \in L$ de donde

1.0 se concluye que $(L, *)$ es subgrupo de $(G, *)$

b2) Sea $f: (H_1 \times H_2, \circ) \rightarrow (L, *)$ tal que $f(h_1, h_2) = h_1 * h_2$

Mostramos: Sean $(h_1, h_2), (t_1, t_2) \in H_1 \times H_2$: $f((h_1, h_2) \circ (t_1, t_2)) = f(h_1 * t_1, h_2 * t_2) =$

0.7 $= (h_1 * t_1) * (h_2 * t_2) = \underbrace{(h_1 * h_2) * (t_1 * t_2)}_{\text{conmut.}} = f(h_1, h_2) * f(t_1, t_2) \rightarrow$ es morfismo

- f es sobreyectivo. En efecto $\forall h_1, h_2 \in L$ ($h_1 \in H_1, h_2 \in H_2$) existe $(h_1, h_2) \in H_1 \times H_2$

0.5 tal que $f(h_1, h_2) = h_1 * h_2$

- f es inyectiva: Sea $f(h_1, h_2) = f(t_1, t_2) \Rightarrow h_1 * h_2 = t_1 * t_2 \Rightarrow t_1^{-1} * h_1 = t_2 * h_2^{-1}$

0.8 pero $t_1^{-1} * h_1 \in H_1$ y $t_2 * h_2^{-1} \in H_2$ y $H_1 \cap H_2 = \{e\}$. Sigue que $t_1^{-1} * h_1 = e$ y $t_2 * h_2^{-1} = e \Rightarrow h_1 = t_1$ y $h_2 = t_2 \Rightarrow (h_1, h_2) = (t_1, t_2)$ así f es biyectiva

Pauta Problema 2

- a) Se sabe que $(K \times K, \oplus, \odot)$ es anillo conmutativo unitario donde $(K, +, \cdot)$ es cuerpo

Encontrar neutro para \oplus (cero del anillo) y neutro para \odot unidad del anillo.

Sea $(a, b) \in K \times K$ y (m_1, m_2) neutro para \oplus , entonces

$$(a, b) \oplus (m_1, m_2) = (a, b) \Leftrightarrow (a + m_1, b + m_2) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a + m_1 = a \\ b + m_2 = b \end{cases}$$

$\Rightarrow m_1 = 0_K \wedge m_2 = 0_K$. Así neutro para \oplus es $(0_K, 0_K)$ donde

1.0 $\rightarrow 0_K$ es el cero del cuerpo K
Unidad (neutro para \odot).

Sea $(a, b) \in K \times K$ y (u_1, u_2) la unidad del anillo: Entonces

$$(a, b) \odot (u_1, u_2) = (a, b) \Leftrightarrow (a \cdot u_1, b \cdot u_2) = (a, b) \Rightarrow \begin{cases} a \cdot u_1 = a \\ b \cdot u_2 = b \end{cases}$$

1.0 $\Rightarrow u_1 = 1_K \wedge u_2 = 1_K$. Así neutro para \odot es $(1_K, 1_K)$ (la unidad en K)

- b) Veamos primero si $(K \times K, \oplus, \odot)$ tiene divisores del cero $(0_K, 0_K)$

Sean $(a, b), (c, d) \in K \times K - \{(0_K, 0_K)\}$ tales que $(a, b) \odot (c, d) = (0_K, 0_K)$

$\Rightarrow (ac, bd) = (0_K, 0_K) \Rightarrow ac = 0_K \wedge bd = 0_K$ pero $a, b, c, d \in K$

y en el cuerpo K no existen divisores del cero. Así, $a = 0_K \vee b = 0_K$ y $c = 0_K \vee d = 0_K$. Entonces son divisores del cero, pero de la

1.5 \rightarrow forma $(a, 0_K)$ y $(0_K, b)$ distintos del $(0_K, 0_K)$ pero $(a, 0_K) \odot (0_K, b) = (0_K, 0_K)$

Elementos invertibles: (a, b) es invertible si $\exists (a', b') \in K \times K$ tal

que $(a, b) \odot (a', b') = (1_K, 1_K) \Rightarrow \begin{cases} a \cdot a' = 1_K \\ b \cdot b' = 1_K \end{cases}$ sigue que necesariamente

$a \neq 0_K \wedge b \neq 0_K$, de modo que no son invertibles los pares

1.5 \rightarrow de la forma $(a, 0_K)$ o $(0_K, b)$ que son precisamente divisores del cero. Sigue que (a, b) es invertible $\Leftrightarrow (a, b)$ no es divisor del cero

- c) $(K \times K, \oplus, \odot)$ no es cuerpo porque tiene divisores del cero

1.0 \rightarrow y un cuerpo no lo tiene.