

Introducción al álgebra (11-1)

Pauta Control 5

P1 $(A, +, \cdot)$ es anillo. $I \subseteq A$ es un Ideal de A . Sin

- i) $(I, +)$ es subgrupo de $(A, +)$
- ii) $(\forall a \in A)(\forall b \in I) a \cdot b \in I \wedge b \cdot a \in I$.

a) Sea $F: (A, +, \cdot) \rightarrow (B, \oplus, \odot)$ morfismo de anillos. Demuestra que la preimagen $F^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal de A (0_B es neutro para \oplus en B).

i) Primero veamos que $F^{-1}(\{0_B\}) = \{x \in A \mid F(x) = 0_B\}$

Usando la propiedad compacta probaremos que $(F^{-1}(\{0_B\}), +)$ es subgrupo de $(A, +)$, es decir:

Por dem. que: $\forall x, y \in F^{-1}(\{0_B\}), (x + (-y)) \in F^{-1}(\{0_B\})$

(1.0) \rightarrow Sean $x, y \in F^{-1}(\{0_B\}) \Rightarrow F(x) = 0_B \wedge F(y) = 0_B$, además
 $y + (-y) = 0 \in A \Rightarrow F(y + (-y)) = F(0) = 0_B$ y por el morfismo

$$F(y) \oplus F(-y) = 0_B \Rightarrow 0_B \oplus F(-y) = 0_B \Rightarrow F(-y) = 0_B$$

Segue que $F(x + (-y)) = F(x) \oplus F(-y) = 0_B \oplus 0_B = 0_B$.

(1.5) \rightarrow Así $(x + (-y)) \in F^{-1}(\{0_B\})$

ii) Por otro lado, sean $a \in A$ y $b \in F^{-1}(\{0_B\})$.

Tenemos que probar que $a \cdot b \in F^{-1}(\{0_B\}) \wedge b \cdot a \in F^{-1}(\{0_B\})$

En efecto, $b \in F^{-1}(\{0_B\}) \Rightarrow F(b) = 0_B$.

Así, por el morfismo $F(a \cdot b) = F(a) \odot F(b) = \underbrace{F(a) \cdot 0_B}_{\text{Prop de Anillos}} = 0_B$

Segue que $a \cdot b \in F^{-1}(\{0_B\})$

(1.5) \rightarrow y análogamente $b \cdot a \in F^{-1}(\{0_B\})$. Concluimos $F^{-1}(\{0_B\})$ es un IDEAL de A .

b) Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo con unidad $1 \in A$ e I un ideal de A .

b.1 Demuestra que si $1 \in I$, entonces $I = A$.

b.2 Demuestra que si $\exists x \in I$ invertible para \cdot en A , entonces $I = A$.

b.1) En efecto, sea $a \in A$ y por hipótesis $1 \in I$.

Como I es ideal de A , $a \cdot 1 \in I \wedge 1 \cdot a \in I$, es decir
 $a \in I$.

1.0 \rightarrow Así, $\forall a \in A, a \in I \Rightarrow A = I$.

b.2) Sea $x \in I$ invertible para \cdot en A , es decir.

$\exists x^{-1} \in A$ tal que $x \cdot x^{-1} = 1$

Como $x^{-1} \in A$ y $x \in I \Rightarrow x \cdot x^{-1} \in I$ (I es ideal)

1.0 \rightarrow Sigue que $1 \in I$ y por (b.1) $A = I$.

P2.- Sea $(A, +, \cdot)$ un anillo conmutativo.

a) Si $a \in A$ es un divisor del cero y $b \in A$ cualquiera, demuestre que si $a \cdot b \neq 0$, entonces $a \cdot b$ es un divisor del cero.

Sea $a \in A - \{0\}$ divisor del cero, entonces $\exists c \in A - \{0\}$ tal que $a \cdot c = 0$. Multiplicando por $b \in A$ queda

(1.0) $\rightarrow (a \cdot c) \cdot b = 0 \cdot b \Rightarrow (a \cdot c) \cdot b = 0$ ($0 \cdot b = 0$ en anillos)
usando asociatividad y conmutatividad.

$$(a \cdot c) \cdot b = a \cdot (c \cdot b) = a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c = 0$$

Como por hipótesis $a \cdot b \neq 0$, $c \neq 0$

(2.0) \rightarrow se concluye que $a \cdot b$ es divisor del cero.

b) Demuestre que si el producto de dos elementos de A es un divisor del cero, entonces el menos uno de ellos es un divisor del cero.

En efecto, sean $x, y \in A$ tal que $x \cdot y$ es divisor del cero
Entonces $\exists c \in A - \{0\}$ tal que $(x \cdot y) \cdot c = 0$

(1.0) \rightarrow y por asociatividad $x \cdot (y \cdot c) = 0$ con $x, y, c \in A - \{0\}$

Sigue que x es divisor del cero o $y \cdot c$ es divisor del cero, pero $y, c \in A - \{0\}$ es decir, y es divisor del cero.

(2.0) \rightarrow Se concluye que $(x \text{ es div del cero}) \vee (y \text{ es div del cero})$