Sea $(G, \circ,)$ grupo y $f: G \to G$
$f(g) = g^{-1}$

PDQ: f isomorfismo $\Leftrightarrow$ G grupo abeliano

$\Rightarrow$) f isomorfismo.

$$\Rightarrow f(a * b) = f(a) * f(b) \quad \forall a, b$$
$$\Rightarrow (a * b)^{-1} = a^{-1} * b^{-1} \quad \forall a, b$$
$$\Rightarrow b^{-1} * a^{-1} = a^{-1} * b^{-1} \quad \forall a, b$$

OJO ESE PASO ES VERDAD PORQUE a y b TIENEN INVERSO PUES G es grupo.

SI BIEN A NOSOTROS NOS GUSTARÍA QUE

$$a * b = b * a$$

ES LO MISMO QUE $a^{-1} * b^{-1} = b^{-1} * a^{-1}$ PUES como G es grupo todos los elementos son inversos de alguien asigue si algo pasa para todos los inversos, pasa para todos los elementos.

MÁS FORMALMENTE

$$b^{-1} * a^{-1} = a^{-1} * b^{-1}$$
$$(b^{-1} * a^{-1})^{-1} = (a^{-1} * b^{-1})^{-1}$$
$$a * b = b * a$$

$\boxed{\Leftarrow}$ G grupo abeliano

$$f(a*b) = (a*b)^{-1} = b^{-1}*a^{-1} = a^{-1}*b^{-1}$$
$$= f(a)*f(b)$$

$\Rightarrow f$ es morfismo.

PARA VER QUE ES BIYECTIVA PODEMOS VER QUE SOBRE E INY. Ó ENCONTRAR SU INVERSA, A ESTAS ALTURAS YA DEBERÍA EMPEZAR A SER NATURAL QUE

$$(f \circ f)(g) = f(f(g)) = f(g^{-1}) = g$$

$$\Rightarrow f^{-1}(g) = f(g)$$

$\Rightarrow$ TIENE INVERSA

$\Rightarrow f$ es biyectiva

$\Rightarrow f$ es isomorfismo //

a) <u>PDQ:</u> $f^{-1}(\{0_B\})$ es un ideal

$$\rightarrow f^{-1}(\{0_B\}) \text{ grupo.}$$

NOTEMOS QUE: $f^{-1}(\{0_B\}) \subseteq A$

como $(A,+,\cdot)$ anillo $\Rightarrow (A,+)$ grupo

luego basta ver que

$f^{-1}(\{0_B\})$ es <u>subgrupo</u> de A

<u>PDQ:</u> $f^{-1}(\{0_B\}) \neq \emptyset$

$$f^{-1}(0_A) = 0_B \Rightarrow 0_A \in f^{-1}(\{0_B\})$$

$$\Rightarrow f^{-1}(\{0_B\}) \neq \emptyset$$

TODO MORFISMO LLEVA EL CERO AL CERO.

<u>PDQ:</u> $\forall x,y \in f^{-1}(\{0_B\}) \Rightarrow x+(-y) \in f^{-1}(\{0_B\})$

como f es morfismo

$$f(x+(-y)) = f(x) \oplus f(-y)$$

$$= 0_B \oplus f(-y) = f(-y)$$

pues $x \in f^{-1}(\{0_B\})$

BASTARÍA VER QUE $f(-y) = 0_B$

NOTEMOS QUE NO HEMOS USADO QUE $y \in f^{-1}(\{0_B\})$

$$\Rightarrow f(y) = 0_B$$

CASI, AH PERO . . . $y + (-y) = 0_A$

$$f(0_A) = f(y + (-y)) = f(y) \oplus f(-y)$$

$$\Rightarrow 0_B = 0_B \oplus f(-y)$$

$$\Rightarrow 0_B = f(-y)$$

$\therefore f^{-1}(\{0_B\})$ (sub) grupo

Veamos ahora que
$\forall a \in A,\ b \in f^{-1}(\{0_B\})$ $\quad ab \in f^{-1}(\{0_B\})$
$ba \in f^{-1}(\{0_B\})$

QUEREMOS QUE $ab \in f^{-1}(\{0_B\})$ o sea

$f(ab) = 0_B$ pero (f morfismo)

$$\Rightarrow f(ab) = f(a) \odot f(B) = f(a) \cdot (0_B) = 0_B$$

EN TODO ANILLO
EL NEUTRO DE LA PRIMERA
OPERACIÓN ES ABSORVENTE CON LA 2ª.
ANÁLOGO EL OTRO CASO

b) I) Sea $a \in A$, es claro que $I \subseteq A$, veamos $A \subseteq I$

NO TENEMOS MÁS INFORMACIÓN QUE I ES IDEAL Y QUE $1 \in I$

OH! pero justo los ideales cumplen que

$$a \cdot 1 \wedge 1 \cdot a \in I$$

$$= a \in I$$

$$\Rightarrow A \subseteq I \Rightarrow A = I$$

II) OJO! DICE QUE $\exists x \in I$ invertible para $\cdot$, $(I, +)$ es grupo

NI IDEA SOBRE $(I, \cdot)$ ASÍ QUE EL INVERSO NO TIENE PORQUÉ ESTAR EN I. PERO SÍ EN A.

$$\Rightarrow x^{-1} \in A \wedge x \in I$$

$$\Rightarrow x^{-1} \cdot x \in I$$

$$\Rightarrow 1 \in I$$

Y POR LO ANTERIOR $I = A$

a) Recordemos que:

$(A, +, \cdot)$ tiene divisores del 0 (neutro para $+$)

si $\exists\ a, b \neq 0$ tq $ab = 0$

como por enunciado a es divisor

$\exists\ c$ (que no es b) con $c \neq 0$

tq $ac = 0 = c \cdot a$

como queremos que

ab sea divisor del cero

necesitamos que $\exists\ d \neq \emptyset$ tq

$$d \cdot (ab) = (ab) d = 0$$

tomando $d = c$

$$c \cdot (a \cdot b) = (c \cdot a) \cdot b = 0 \cdot b = 0$$

$$(a \cdot b) \cdot c \underset{\uparrow}{=} (b \cdot a) \cdot c = b(a \cdot c) = b \cdot 0 = 0$$

pues es un anillo conmutativo

$\therefore$ ab es divisor del cero

b) Si ac es divisor del 0

$\Rightarrow ac \neq 0 \Rightarrow a \wedge c \neq 0$

Además $\exists\ b \neq 0$ ts

$$b \circ (ac) = 0$$

SI a NO ES DIVISOR DE C 0

$\forall\ d \neq 0 \quad ad = da \neq 0$

en particular para $d = b$

$$\Rightarrow \underset{\substack{\neq \\ 0}}{(b \circ a)} \circ \underset{\substack{\neq \\ 0}}{c} = 0$$

$\Rightarrow (b \cdot a) \wedge c$ son divisores del 0

en particular c que era lo que me interesaba //

(Análogo el otro caso, NOTANDO QUE EL ANILLO ES CONMUTATIVO $\Rightarrow b \circ a \cdot c = b \circ c \circ a$)

c) Veamos que $Ann(a)$ es (sub) grupo

1) $Ann(a) \subseteq A$ //

2) $Ann(a) \neq \emptyset$ si pues $0 \in Ann(a)$
ya que $0 \cdot a = a \cdot 0 = 0$

3) PDQ: $\forall x, y \in Ann(a) \Rightarrow (x + (-y)) \in Ann(a)$

$x \in Ann(a) \Rightarrow xa = 0$

$y \in Ann(a) \Rightarrow \cancel{ya} = 0 = 0a = (y + (-y))a$
$= \cancel{ya} + (-y)a$

$\Rightarrow 0 = (-y)a \Rightarrow (-y) \in Ann(a)$ //

$$\Rightarrow (x+(-y))a$$
$$= xa + (-y)a$$
$$= 0 + 0 = 0$$
pues x e $-y \in Ann(a)$ //

$\Rightarrow (Ann(a), +)$ es grupo.

PDQ: $\forall b \in A, \forall c \in Ann(a)$
$b \circ c \wedge c \circ b \in Ann(a)$

como $c \in Ann(a)$
$$\Rightarrow c \circ a = 0$$
$$\Rightarrow b \circ c \circ a = 0$$
$$\Rightarrow (b \circ c) \in Ann(a)$$ //

además como $Ann(a) \subseteq A$ conmutativo para $\circ$

$$\Rightarrow b \circ c = c \circ b$$
(la conmutativida es "hedoritaria"
$A \subseteq B \leftarrow$ conmutativo
$\Rightarrow A$ conmutativo) //

DeL RECUPERATIVO SABEMOS QUE

$$(a,b) \sim (c,d) \Leftrightarrow ad = bc$$

es una relación de equivalencia.

Y sus clases de equivalencia se pueden identificar con $[(a,b)] = \frac{a}{b}$

Y NOS DEFINEN

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad+bc}{bd}$$

CUANDO SE NOS PREGUNTA SI LA OPERACIÓN ESTÁ BIEN DEFINIDA, ES QUE SI DA* LO MISMO CUAL REPRESENTANTE SE TOME DE LA CLASE DE EQUIVALENCIA EL RESULTADO NO CAMBIA.

Sea $(x,y) \in [(a,b)]$

PDQ $\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{a}{b} + \frac{c}{d}$

$$\frac{x}{y} + \frac{c}{d} = \frac{xd + cy}{yd}$$

$$\frac{a}{b} + \frac{c}{d} = \frac{ad + cb}{bd}$$

queremos que sean iguales

SON CLASES DE EQUIVALENCIA!

o sea que

$$\frac{xd + cy}{yd} \in [((ad + cb), bd)]$$

$\Leftrightarrow$ $\cancel{\frac{xd+cy}{yd}}$ $\sim$

$$(xd + cy)(bd) = ((ad + cb))(yd)$$

$$xbd^2 + cybd = ad^2y + cbyd$$

esto pues como es anillo

- distribuye con respecto a +

$\wedge$ es conmutativo

SOLO FALTA QUE $xbd^2 = ad^2y$

pero $xb = ay$ (pues $(x,y) \in [(a,b)]$)

$\Rightarrow$ se tiene la igualdad.

Análogo para $(r,s) \in [(c,d)]$

además para la otra operación.

<u>PDQ:</u> $\frac{a}{b} \cdot \frac{c}{d} = \frac{x}{y} \cdot \frac{c}{d}$

$\Leftrightarrow [(ac, bd)] = [(xc, yd)]$

$\Leftrightarrow (ac, bd) \sim (xc, yd)$

$\cancel{\Leftrightarrow ac^2x}$

$acyd = bdxc$

Pero $(x,y) \sim (a,b)$

$\Rightarrow xb = ya$

$\Rightarrow acyd = aycd = xbcd$

$= bdxc$ //

Análogo para $(r,s) \in [(c,d)]$

Ustedes se preguntarán

¡Pero si eso es obvio! siempre se han sumado fracciones así!

PERO AHORA ESTÁN SUMANDO CLASES DE EQUIVALENCIA.

FINALMENTE VEAMOS QUE

$(A \times A \setminus \{0\}/\sim, +, \cdot)$ es cuerpo

$\Rightarrow (A \times A/\{0\}/\sim, +)$ grupo abeliano

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) + \frac{e}{f} = \frac{ad + cb}{bd} + \frac{e}{f}$$

$$= \frac{adf + cbf + ebd}{bdf}$$

$$= \frac{a}{b} + \frac{cf + ed}{df} = \frac{a}{b} + \left(\frac{c}{d} + \frac{e}{f}\right)$$

$\therefore$ asosciativa.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{c}{d}\right) = \frac{ad + cb}{bd} = \frac{da + bc}{db} = \frac{c}{d} + \frac{a}{b}$$

$\therefore$ conmutativa.

$$\left(\frac{a}{b} + \frac{0}{1}\right) = \left(\frac{a1 + 0b}{b1}\right) = \frac{a}{b}$$

$\therefore$ $[(0,1)]$ es el neutro

$$\left(\frac{a}{b}+\frac{-a}{b}\right)=\frac{ab+(-a)b}{b\cdot b}=\frac{ab-ab}{b\cdot b}$$

prop. anillos.

$$=\frac{0}{b^2}=\frac{1}{b^2}\cdot\frac{0}{1}=0$$

como es el neutro para $+$
es absorvente para $\cdot$

$\therefore$ Todos tienen inverso.

$\therefore$ Es grupo abeliano

PDQ: $\cdot$ distribuye con respecto a $+$

$$\frac{e}{f}\left(\frac{a}{b}+\frac{c}{d}\right)=\frac{e}{f}\left(\frac{ad+cb}{bd}\right)$$

$$=\frac{ead+ecb}{fbd}$$

$$=\frac{ea\cancel{d}}{fb\cancel{d}}+\frac{ec\cancel{b}}{f\cancel{b}d}\quad \text{pues } d \wedge b\neq 0$$

$$=\frac{e}{f}\cdot\frac{a}{b}+\frac{e}{f}\cdot\frac{c}{d}$$ (Análogo otro caso)

$$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)\cdot\frac{e}{f}$$

$$=\left(\frac{ac}{bd}\right)\cdot\frac{e}{f}=\frac{ace}{bdf}=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{ce}{df}\right)$$

$$=\frac{a}{b}\cdot\left(\frac{c}{d}\cdot\frac{e}{f}\right)$$

$\Rightarrow \left(A\times A\setminus\{0\}/\sim,\ +,\ \cdot\right)$

es un anillo

$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{1}{1}\right)=\frac{a\cdot 1}{b\cdot 1}=\frac{a}{b}\Rightarrow\frac{1}{1}$ es neutro

$\Rightarrow$ es anillo con unidad

$\left(\frac{a}{b}\cdot\frac{c}{d}\right)=\left(\frac{ac}{bd}\right)=\frac{ca}{db}=\frac{c}{d}\cdot\frac{a}{b}$

$\Rightarrow$ es anillo conmutativo con unidad.

(sea $\frac{a}{b}\neq\frac{0}{1}\Rightarrow\frac{b}{a}\neq\frac{1}{0}$

$\Rightarrow$ tiene sentido $\frac{b}{a}$

$\frac{a}{b}\cdot\frac{b}{a}=\frac{ab}{ba}=\frac{1}{1}\Rightarrow$ todo elemento distinto del 0 tiene inverso

$\Rightarrow (A\times A\setminus\{0\}/\sim,+,\cdot)$ es un cuerpo

ES IMPORTANTE NOTAR QUE EL NEUTRO ES ÚNICO

¿Pero $\frac{0}{2}$ también es 0?

SÍ PERO SE ESTÁN USANDO CLASES DE EQUIVALENCIA

$$\Rightarrow \frac{0}{2} = \frac{0}{1} = \frac{0}{K} = 0 \,//$$

NO SOLO TOMAN EL MISMO VALOR SON EL MISMO ELEMENTO!, LO MISMO PARA $\frac{2}{2} = \frac{1}{1} = \frac{3}{3} = \frac{K}{K} = 1 \,//$

EN RESUMEN $[(0,K)] = [(0,1)]$ ← neutro para $+$

$[(K,K)] = [(1,1)]$ ← neutro para $\cdot$

Además del recuperativo

$$F : (A \times A \setminus \{0\} / \sim) \to \mathbb{Q}$$

$$F([(a,b)]) = \frac{a}{b} \text{ es biyectiva.}$$

y por la definición de las operaciones se tiene el morfismo.