MA1101-3 Introducción al Álgebra
Profesor: Pablo Dartnell R.
Auxiliar: Felipe Atenas M.

Resumen Control 6

A continuación se presenta un resumen de los contenidos del control 6 del curso Introducción al Álgebra. Ojo que es un resumen, por lo que puede no contener todo lo necesario para el control, pero sí lo esencial. Mi consejo es que ustedes mismos elaboren su propio resumen, porque son ustedes mismos los que saben qué cosas manejan bien y las que no manejan tan bien.

Números complejos

1. Sea $\mathbb{C} = \mathbb{R}^2$. Definimos las operaciones $+$ y $\cdot$ en $\mathbb{C}$ para $z = (a, b)$, $w = (c, d) \in \mathbb{C}$: $z + w = (a + c, b + d)$ y $z \cdot w = (ac - bd, ad + bc)$.
2. Teorema: $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ es un cuerpo.
3. Inverso multiplicativo: Sea $z = (a, b) \in \mathbb{C} \setminus \{(0, 0)\}$. Tenemos entonces que el inverso multiplicativo de z es
$$z^{-1} = (\frac{a}{a^2 + b^2}, \frac{-b}{a^2 + b^2})$$
4. Propiedades:
   - $(z + w)^2 = z^2 + 2zw + w^2$
   - $(z + w)(z - w) = z^2 - w^2$
   - $\sum_{k=a}^{b} z^k = \frac{z^a - z^{b+1}}{1 - z}$ si $z \neq 1$.
5. Notación: al complejo $z = (a, b)$ también lo podemos denotar como $z = a + bi$, donde $i = (0, 1)$ y $a, b \in \mathbb{R}$. Además se tiene que $i = \sqrt{-1}$.
6. Partes real e imaginaria: Sea $w = a + bi \in \mathbb{C}$. Se define su parte real e imaginaria, respectivamente, como:
$$\mathbb{R}e(w) = a \in \mathbb{R} \text{ y } \mathbb{I}m(w) = b \in \mathbb{R}$$
De esta forma, un complejo z se puede escribir como $z = \mathbb{R}e(z) + \mathbb{I}m(z)i$.
7. Propiedades: Para $z, w \in \mathbb{C}$ y $\alpha \in \mathbb{R}$:
   - $\mathbb{R}e(z + w) = \mathbb{R}e(z) + \mathbb{R}e(w)$ y $\mathbb{I}m(z + w) = \mathbb{I}m(z) + \mathbb{I}m(w)$.
   - $\mathbb{R}e(\alpha z) = \alpha\mathbb{R}e(z)$ y $\mathbb{I}m(\alpha z) = \alpha\mathbb{I}m(z)$.
   - $z = w \iff \mathbb{R}e(z) = \mathbb{R}e(w) \wedge \mathbb{I}m(z) = \mathbb{I}m(w)$
8. Conjugación: Sea $z = a + bi \in \mathbb{C}$. Definimos el conjugado de z como $\overline{z} = a - bi$. Geométricamente, el conjugado de un complejo es el reflejo con respecto al eje x.
9. Propiedades: Para $z, w \in \mathbb{C}$:
   - $\overline{z \pm w} = \bar{z} \pm \bar{w}$.
   - $\overline{zw} = \bar{z}\bar{w}$, por lo que si $w \neq 0$: $\overline{z \cdot w^{-1}} = \overline{z} \cdot \overline{w^{-1}}$
   - Si $\beta \in \mathbb{R}$, entonces $\overline{\beta z} = \beta\bar{z}$ y $\overline{\overline{z}} = z$
   - $\mathbb{R}e(z) = \mathbb{R}e(\bar{z})$ y $\mathbb{I}m(z) = -\mathbb{I}m(\bar{z})$
   - $\mathbb{R}e(z) = \frac{1}{2}(z + \bar{z})$ y $\mathbb{I}m(z) = \frac{1}{2i}(z - \bar{z})$
   - $z \in \mathbb{R} \iff z = \bar{z}$

10. Módulo: Sea $w = w_1 + w_2 i \in \mathbb{C}$. El módulo de w es el real $|w| = \sqrt{w_1^2 + w_2^2} \geq 0$
11. Propiedades: Para $z, w \in \mathbb{C}$:
    - $|z|^2 = z \cdot \overline{z}$ y $|z| = |\overline{z}|$
    - $|z \cdot w| = |z| \cdot |w|$, por lo que si $w \neq 0$: $|z \cdot w^{-1}| = |z| \cdot |w^{-1}|$
    - $|\mathbb{R}e(z)| \leq |z|$ y $|\mathbb{I}m(z)| \leq |z|$ (cateto ¡hipotenusa)
    - $z = 0 \iff |z| = 0$
    - Desigualdad triangular: $|z + w| \leq |z| + |w|$
    - Si $z \neq 0$, entonces $z^{-1} = \dfrac{\overline{z}}{|z|^2}$
12. Notación polar: Sea $\theta \in \mathbb{R}$. Se define el complejo $e^{i\theta}$ como $e^{i\theta} = cos(\theta) + isen(\theta)$.
13. Propiedades:
    - $(\forall \theta \in \mathbb{R})|e^{i\theta}| = 1$
    - $(\forall \theta \in \mathbb{R})\overline{e^{i\theta}} = (e^{i\theta})^{-1} = e^{i \cdot -\theta}$
    - $(\forall \alpha, \beta \in \mathbb{R})e^{i\alpha} \cdot e^{i\beta} = e^{i(\alpha+\beta)}$
    - Fórmula de Moivre: $(\forall \theta \in \mathbb{R})(\forall n \in \mathbb{Z})(e^{i\theta})^n = e^{in\theta}$
      También se puede escribir como $(cos(\theta) + isen(\theta))^n = cos(n\theta) + isen(n\theta)$
14. Propiedad: Todo complejo se puede escribir de la forma $z = r \cdot e^{i\theta}$, con $r = |z| \geq 0$ y $\theta = arg(z) \in \mathbb{R}$ es el argumento.
15. Propiedad: Sean $z, w \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$. Entonces:

$$z = w \iff |z| = |w| \wedge arg(z) = arg(w)\ (mod\, 2\pi)$$

16. Raíz n-ésima de la unidad: Sean $z \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es raíz n-ésima de la unidad si $z^n = 1$.

    Si escribimos $z = r \cdot e^{i\theta}$, entonces $r = 1$ y, además, existe(n) $k \in \mathbb{Z}$ tal que $\theta = \dfrac{2\pi k}{n}$. Luego, las raíces de la unidad tienen la forma $z = e^{i\frac{2\pi k}{n}}$ con $k = 0, ..., n-1$ (n complejos distintos pero con el mismo módulo).
17. Raíces de un complejo cualquiera: Sean $w \in \mathbb{C}$ y $n \geq 2$. Diremos que z es una raíz n-ésima de w si $z^n = w$.

    Si escribimos $z = |z| \cdot e^{i\theta}$ y $w = |w| \cdot e^{i\phi}$, entonces se cumple que $|z| = \sqrt[n]{|w|}$ y $\theta = \dfrac{\phi + 2k\pi}{n}$ para $k = 0, ..., n-1$.
18. Propiedad: Sea $n \geq 2$. La suma de las n raíces n-ésimas de la unidad vale 0.

`Cualquier comentario o consulta a felipe.e.atenas@gmail.com`
`Éxito en el estudio!`