MA1101-3 Introducción al Álgebra.
Profesor: Pablo Dartnell R.
Auxiliar: Felipe Atenas M.

Resumen de Polinomios

A continuación se presenta un resumen de lo visto de Polinomios en el curso Introducción al Álgebra. Ojo que es un resumen, por lo que puede no contener todo lo necesario, pero sí lo esencial. Mi consejo es que ustedes mismos elaboren su propio resumen, porque son ustedes mismos los que saben qué cosas manejan bien y las que no manejan tan bien.

Polinomios

1. Definición de polinomio: Sea $\mathbb{K}$ un cuerpo. Un polinomio es una función p de $\mathbb{K}$ en $\mathbb{K}$ tal que para todo $x \in \mathbb{K}$:
$$p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n = \sum_{k=0}^{n} a_kx^k.$$
2. Igualdad de polinomios: Dos polinomios son iguales si y solo si tienen los mismos coeficientes.
3. Grado de un polinomio: Sea $p(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + ... + a_nx^n$ un polinomio. El grado de p, denotado $gr(p)$, es el mayor k tal que a_k es no nulo. El grado del polinomio nulo es $-\infty$. Los polinomios de grado 0 son las constantes no nulas.
4. Polinomio mónico: Un polinomio se dice mónico si $a_{gr(p)} = 1$. Esto es, el coeficiente de la potencia más grande es 1.
5. Suma de polinomios: $(p + q)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{n}(a_k + b_k)x^k$.
6. Multiplicación de polinomios: $(p \cdot q)(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{2n} \left(\sum_{j=0}^{k} a_jb_{k-j} \right) \cdot x^k$.

   (En los dos puntos anteriores, b_k son los coeficientes del polinomio q).
7. Propiedades del grado: $gr(p + q) \leq \text{máx}\{gr(p), gr(q)\}$ y $gr(pq) = gr(p) + gr(q)$.
8. $(\mathbb{K}[x], +, \cdot)$ es un anillo conmutativo con unidad, sin divisores de cero.
9. Propiedad: Los únicos polinomios que poseen inverso son las constantes no nulas.
10. **Teorema de la División**: Sean $p, d \in \mathbb{K}[x]$ con d no nulo. Entonces existe un <u>único</u> par $q, r \in \mathbb{K}[x]$ tales que: $p = q \cdot d + r$ y $gr(r) < gr(d)$. A q se le llama cuociente y a r se le llama resto.
11. Divisibilidad: Cuando $r(x) = 0$, diremos que d divide a p, es decir, $d|p \iff (\exists q \in \mathbb{K}[x])\, p = q \cdot d$
12. **Teorema del Resto**: Sea $p \in \mathbb{K}[x]$ y $c \in \mathbb{K}$. El resto de dividir p por $(x - c)$ es $p(c)$.
13. Raíz de un polinomio: Diremos que $c \in \mathbb{K}$ es raíz del polinomio p si $p(c) = 0$.
14. Propiedad: $c \in \mathbb{K}$ es raíz del polinomio $p \iff (x - c)|p$.
15. Propiedades:
    - Si $c_1, ..., c_k$ son raíces distintas del polinomio p, entonces $(x - c_1) \cdot ... \cdot (x - c_k)|p(x)$.
    - Si un polinomio p tiene grado $n \geq 1$, entonces p tiene a lo más n raíces distintas.
    - Si un polinomio p tiene grado $\leq n$ y $c_1, ..., c_{n+1}$ son raíces distintas de p, entonces p es el polinomio nulo.
    - Sean p, q polinomios con grado a lo más $n \geq 1$. Si p y q coinciden en $n + 1$ puntos distintos, entonces $p = q$.

16. **Teorema Fundamental del Álgebra**: Todo polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ y grado $n \geq 1$ tiene a lo menos una raíz compleja.

17. Propiedad: Si p es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{C}$ tal que $gr(p) = n \geq 1$, entonces existen valores $\alpha, c_1, ..., c_m \in \mathbb{C}$ y naturales $l_1, ..., l_m \geq 1$ tales que: $p(x) = \alpha(x - c_1)^{l_1} \cdot ... \cdot (x - c_m)^{l_m}$

    (Notar que $\alpha = a_n$. Además cada natural $l_1, ..., l_m$ es llamado multiplicidad de $c_1, ..., c_m$ respectivamente).

18. Prop.: Si p es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$ y si $z \in \mathbb{C}$ es una raíz de p, entonces $\overline{z}$ también es una raíz de p.

19. Prop.: Sea p es un polinomio con coeficientes en $\mathbb{R}$, tal que $gr(p) = n \geq 1$.

    Entonces, existen valores $\alpha, c_1, ..., c_m, a_1, b_1, ..., a_s, b_s \in \mathbb{R}$ tales que

    $$p(x) = \alpha(x - c_1) \cdot ... \cdot (x - c_m)(x^2 + a_1x + b_1) \cdot ... \cdot (x^2 + a_sx + b_s)$$

    donde los reales $c_1, ..., c_m$ (se pueden repetir) son las raíces de p, $x^2 + a_1x + b_1, ..., x^2 + a_sx + b_s$ son polinomios (que se pueden repetir) sin raíces reales y $\alpha = a_n$.

20. Polinomios a coeficientes enteros: Sea p un polinomio con coeficientes enteros $a_0, ..., a_n \in \mathbb{Z}$. Si $\frac{r}{s} \in \mathbb{Q}$ es una raíz racional de p (con $mcd(r, s) = 1$), entonces $r|a_0$ y $s|a_n$. Eventualmente podríamos no encontrar raíces racionales.

21. Corolario: Si p es un polinomio mónico a coeficientes enteros $a_0, ..., a_{n-1} \in \mathbb{Z}$, entonces si p tiene una raíz racional, esta (en verdad) es entera y divide a a_0.

    Dicho de otra forma, en este caso, candidatos a raíces del polinomio, son los divisores enteros del término libre.

`Cualquier comentario o consulta a felipe.e.atenas@gmail.com`
`Éxito en el estudio!`