

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesores: Maya Stein

Auxiliares: Juan Pedro Ross

Fecha: Jueves 4 de Agosto



Auxiliar 13: Complejos y Polinomios

P1. Determine los valores de $a, b \in \mathbb{R}$ tales que $\frac{1}{a+bi} + \frac{2}{a-bi} = 1+i$.

P2. Pruebe que el producto de las n raíces n -ésimas de la unidad es igual a $(-1)^{n-1}$.

P3. Sean $z_1, z_2 \in \mathbb{C}$. Demuestre que:

a) $(z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2) \in \mathbb{R}$

b) $|z_1|^2 + |z_2|^2 \geq z_1\bar{z}_2 + \bar{z}_1z_2$

P4. a) Sea $f : \mathbb{C} \times \mathbb{C} \rightarrow \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ definida por $f(z_1, z_2) = |z_1 + z_2|$. Pruebe que

$$\forall z_1, z_2 \in \mathbb{C} : f(z_1, z_2) \cdot f(\bar{z}_1, \bar{z}_2) \leq (|z_1| + |z_2|)^2.$$

b) Sean $z, w \in \mathbb{C}$ tales que $|z| = |w| = 1$. Pruebe que

$$|z + w| = |z| + |w| \Leftrightarrow z = w.$$

Indicación: Pruebe que $[|z| = 1 \wedge \operatorname{Re}(z) = 1] \Leftrightarrow z = 1$.

P5. Considere el polinomio $P(x) = x^4 - 2x^3 + 6x^2 + 22x + 13$. Se sabe que $x_1 = 2 + 3i$ es raíz de P . Se pide encontrar todas las raíces de P y luego factorizarlo en \mathbb{R} y \mathbb{C} .