PJ

$$\sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(3+(-1)^k)^k}$$

impar par

$$= \frac{1}{(3+(-1)^1)^1} + \frac{1}{(3+(-1)^2)^2} + \frac{1}{(3+(-1)^3)^3} + \dots + \frac{1}{(3+(-1)^{2n-1})^{2n-1}} + \frac{1}{(3+(-1)^{2n})^{2n}}$$

$$= \frac{1}{2^1} + \frac{1}{4^2} + \frac{1}{2^3} + \frac{1}{4^4} + \dots + \frac{1}{2^{2n-1}} + \frac{1}{4^{2n}}$$

$$= \sum_{i \text{ impar}} \frac{1}{2^i} + \sum_{k \text{ par}} \frac{1}{4^k}$$

RECORDEMOS QUE i impar $\iff i = 2j-1$

$$= \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{2^{2j-1}} + \sum_{j=1}^{n} \frac{1}{4^{2j}}$$

$$= 2\sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^j + \sum_{j=1}^{n} \left(\frac{1}{16}\right)^j$$

OJO LA GEOM. PARTE DE $\underline{0}$

$$= 2\left(\sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{4}\right)^j - \left(\frac{1}{4}\right)^0\right) + \sum_{j=0}^{n} \left(\frac{1}{16}\right)^j - \left(\frac{1}{16}\right)^0$$

$$= 2 \cdot \frac{\left(\frac{1}{4}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{4} - 1} - 2 + \frac{\left(\frac{1}{16}\right)^{n+1} - 1}{\frac{1}{16} - 1} - 1$$

$$= \frac{8}{3}\left(1 - \frac{1}{4}^{n+1}\right) + \frac{16}{15}\left(1 - \frac{1}{16}^{n+1}\right) - 3$$

P6 $S_1 \neq \emptyset \wedge S_2 \neq \emptyset$ pues en ambos están el 0.

además $S_1 \subseteq \mathbb{Z} \wedge S_2 \subseteq \mathbb{Z}$

PARA QUE $(S_1, +)$ sea grupo

$\Rightarrow \forall x, y \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1$

$x \in S_1 \Rightarrow x = 3K$

$y \in S_1 \Rightarrow y = 3K' \Rightarrow -y = -3 \cdot K' = 3 \cdot (-K') = 3K''$

$\Rightarrow x + (-y) = 3K + 3K'' = 3(K + K'')$

Análogo para S_2.

Veamos para $(S_1 \cup S_2, +)$

$S_1 \cup S_2 \neq \emptyset$ pues $S_1 \subseteq S_1 \cup S_2 \wedge S_1 \neq \emptyset$

además $S_1 \subseteq \mathbb{Z} \wedge S_2 \subseteq \mathbb{Z}$

$\Rightarrow S_1 \cup S_2 \subseteq \mathbb{Z} \cup \mathbb{Z} = \mathbb{Z}$ //

Veamos si $\forall x, y \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow (x + (-y)) \in S_1 \cup S_2$

sabemos que si $x, y \in S_1 \cup S_2 \Rightarrow x \in S_1 \vee x \in S_2$
$y \in S_1 \vee y \in S_2$

por la parte anterior sabemos que

$x \in S_1 \wedge y \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1 \Rightarrow x + (-y) \in S_1 \cup S_2$

idem para S_2

el caso interesante es

$x \in S_1 \wedge y \in S_2$ (QUE ES IGUAL A $x \in S_2 \wedge y \in S_1$)

$x+(-y) = 3k + 2k'$ ¿es necesariamente esto de la forma $3k''$ v $2k'''$?

NO POR EJEMPLO si $k = k' = 1$

$\Rightarrow x + (-y) = 5 \neq 2k'''$ v $3k''$

$\Rightarrow (S_1 \cup S_2, +)$ NO ES SUBGRUPO.

P3

$x^4+2=0$

$\Rightarrow x^4=-2 = 2e^{i\pi}$

sea $x = re^{i\alpha}$

$\Rightarrow r^4=2 \Rightarrow r=\sqrt[4]{2}$

$$\alpha = \frac{\pi+2k\pi}{4} = \frac{(2k+1)\pi}{4}$$

$k\in\{0,1,2,3\}$ //

$$r_1 = \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\left(\cos\left(\tfrac{\pi}{4}\right)+i\,\mathrm{sen}\left(\tfrac{\pi}{4}\right)\right)$$
$$= \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r_2 = \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{3\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}+i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r_3 = \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{5\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$$r_4 = \sqrt[4]{2}\,e^{i\frac{7\pi}{4}} = \sqrt[4]{2}\left(\frac{\sqrt{2}}{2}-i\frac{\sqrt{2}}{2}\right)$$

$\Rightarrow$ factorizado en $\mathbb{C}$

$$p(x) = \underbrace{\left(x-\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}^{(1)}\underbrace{\left(x-\sqrt[4]{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}^{(2)}\cdot$$
$$\overbrace{\left(x+\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}-\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}^{(3)}\overbrace{\left(x+\sqrt[4]{2}\frac{\sqrt{2}}{2}+\sqrt[4]{2}\cdot\frac{\sqrt{2}}{2}i\right)}^{(4)}$$

EN $\mathbb{R}$ HAY QUE MULTIPLICAR (1) CON (2) Y (3) CON (4) NOTANDO LA SUMA POR DIFERENCIA.

Sea $p(x) = x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2}$

y $q(x) = x^2 + x + 1$

PDQ: $q(x) \mid p(x)$

forma bruta:

$$x^{3n_1} + x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2} \div x^2+x+1 = x^{3n_1-2} + x^{3n_2-1}$$

$$-(x^{3n_1} + x^{3n_1-1} + x^{3n_1-2})$$

$$x^{3n_2+1} + x^{3n_3+2} + x^{3n_1-1} + \cancel{x}^{3n_1-2}$$

$$-(x^{3n_2+1} + x^{3n_2} + x^{3n_2-1})$$

$$x^{3n_3+2} + \ldots$$

parece que este camino no funciona pues siguen apareciendo $x^{3n_1}, x^{3n_2}, x^{3n_3} \ldots$

OTRA FORMA dividiendo por raices de $q(x)$

$$x^2+x+1 = 0 \Rightarrow x = \frac{-1 \pm \sqrt{1-4}}{2} = -\frac{1}{2} \pm \frac{\sqrt{3}i}{2}$$

a estas alturas es fácil ver que

$$x_1 = e^{i\frac{2\pi}{3}} \qquad x_2 = e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$P(x_1) = \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3n_1} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3n_2+1} + \left(e^{i\frac{2\pi}{3}}\right)^{3n_3+2}$$

$$= \left(e^{i2\pi}\right)^{n_1} + \left(e^{i2\pi}\right)^{n_2} e^{i\frac{2\pi}{3}} + \left(e^{i2\pi}\right)^{n_3} e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

$$= 1 + e^{i\frac{2\pi}{3}} + e^{i\frac{4\pi}{3}}$$

¡Suma de las 3 raices de la unidad!

$\Rightarrow p(x_1) = 0$ //

$\Rightarrow (x - x_1) \mid p(x)$ ☆

$\wedge$ recordando que $x_2^2 = x_1$

$\Rightarrow p(x_2) = 0$ //

$\Rightarrow (x - x_2) \mid p(x)$ ☆☆

☆ + ☆☆ $\Rightarrow (x-x_1)(x-x_2) \mid p(x)$

$\Rightarrow x^2 + x + 1 \mid p(x)$ //

si $\sum_{k=1}^{n} a_k = \frac{n^2+5n}{3} \Rightarrow$ ¿ a_n ?

$\|$

$$a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1} + a_n = \frac{n^2+5n}{3}$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2+5n}{3} - (a_1 + a_2 + \dots + a_{n-1})$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2+5n}{3} - \sum_{k=1}^{n-1} a_k$$

$$\Rightarrow a_n = \frac{n^2+5n}{3} - \left(\frac{(n-1)^2 + 5(n-1)}{3}\right)$$

$$= \frac{n^2+5n - (n^2 - 2n + 1 + 5n - 5)}{3}$$

$$= \frac{\cancel{n^2} + \cancel{5n} - \cancel{n^2} + 2n - 1 - \cancel{5n} + 5}{3}$$

$$= \frac{2n+4}{3}$$

//

PDQ: $z+\frac{1}{z} \in \mathbb{R} \iff Im(z)=0 \lor |z|=1$

$\Rightarrow$ $z=a+bi$ además $z\cdot\overline{z}=|z|^2$

$$\frac{z\overline{z}}{|z^2|}=\frac{1}{z}$$

$$z+\frac{1}{z}=z+\frac{\overline{z}}{|z|^2}=a+bi+\frac{a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a(a^2+b^2)+b(a^2+b^2)i+a-bi}{a^2+b^2}$$

$$=\frac{a(a^2+b^2)+a+b(a^2+b^2-1)i}{a^2+b^2}$$

para que $\in \mathbb{R} \Rightarrow Im\left(z+\frac{1}{z}\right)=0$

$\Rightarrow b(a^2+b^2-1)=0$

$\Rightarrow b=0 \quad \lor \quad a^2+b^2=1$

$\Rightarrow Im(z)=0 \quad \lor \quad |z|^2=1$

$\Rightarrow Im(z)=0 \quad \lor \quad |z|=1$ //

$\Rightarrow Im(z)=0$

$\Leftarrow$ si $Im(z)=0 \Rightarrow z\in\mathbb{R}$, $\frac{1}{z}\in\mathbb{R} \Rightarrow z+\frac{1}{z}\in\mathbb{R}$ //

si $|z|=1 \Rightarrow z+\frac{\overline{z}}{|z|^2}=z+\overline{z}=2\,Re(z)\in\mathbb{R}$ //

Sea $f: \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ $\quad f(z) = \overline{z}$

1) PDQ: f es isomorfismo entre $(\mathbb{C}, +, \cdot)$ ∧ $(\mathbb{C}, +, \cdot)$

1.1) PDQ: f es biyectivo

1.1.1) PDQ: f es inyectivo

$$f(x) = f(y) \Rightarrow \overline{x} = \overline{y} \quad \left(\overline{(\ )} \right)$$

$$\Rightarrow \overline{\overline{x}} = \overline{\overline{y}}$$

$$\star \Rightarrow \boxed{x = y} \quad \therefore f \text{ iny.} \quad //$$

1.1.2) PDQ: f es sobreyectivo

basta tomar $\overline{z}$ ∧ $f(\overline{z}) = \overline{\overline{z}} = z$

$\Rightarrow$ TODO z TIENE PRE-IMAGEN

$\star\star \Rightarrow f$ sob //

$\star + \star\star \Rightarrow f$ biyectiva //

1.2) PDQ: f es morfismo

1.2.1) $f(x+y) = f(x) + f(y)$

$$f(x+y) = \overline{x+y} = \overline{x} + \overline{y} = f(x) + f(y) \quad //$$

1.2.2) $f(xy) = f(x) \cdot f(y)$

$$f(xy) = \overline{xy} = \overline{x} \cdot \overline{y} = f(x) \cdot f(y) \quad //$$

$\therefore f$ es isomorfismo.