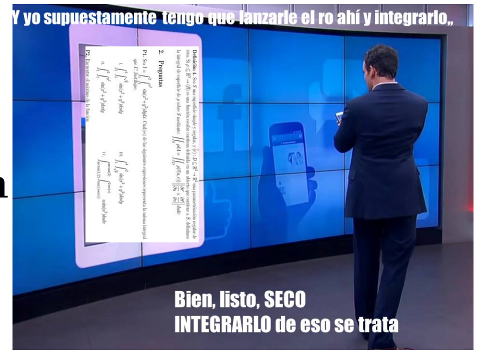
MA2001-2 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Manuel del Pino
Auxiliar: José Palacios A. , Sebastián Urzúa B.



Auxiliar Extra Examen

16 de Agosto de 2016

1. Resumen

Definición 1. Un conjunto $S \subseteq \mathbb{R}^3$ se llama superficie (o variedad bidimensional) si existe $\vec{r} : \Omega \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $S = \{\vec{r}(u,v) : (u,v) \in \Omega\}$, donde Ω es un conjunto conexo.

Definición 2 (Vectores Tangente y Normal)**.** $\hat{t}_u = \dfrac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}}{||\frac{\partial \vec{r}}{\partial u}||}$; $\quad \hat{t}_v = \dfrac{\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}}{||\frac{\partial \vec{r}}{\partial v}||}$; $\quad \hat{n} = \dfrac{\hat{t}_u \times \hat{t}_v}{||\hat{t}_u \times \hat{t}_v||}$

Definición 3. Sea S una superficie simple y regular, y $\vec{r} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Definimos el área de S mediante: $A(S) = \displaystyle\iint_D \left|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\right| dudv$.

Definición 4. Sea S una superficie simple y regular, y $\vec{(r)} : D \subseteq \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una parametrización regular de ésta. Si $\rho : \subseteq \mathbb{R}^3 \to (R)$ es una función escalar continua definida en un abierto que contiene a S, definimos la integral de superficie de ρ sobre S mediante: $\displaystyle\iint_S \rho dA = \iint_D \rho(\vec{r}(u,v)) \left|\left|\frac{\partial \vec{r}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{r}}{\partial v}\right|\right| dudv$

2. Preguntas

P1. Sea $I = \displaystyle\int_1^2 \int_1^{x^2} \sin(x^2+y^2) dydx$. Cual(es) de las siguientes expresiones representa la misma integral que I? Justifique.

I. $\displaystyle\int_1^4 \int_1^{\sqrt{y}} \sin(x^2+y^2) dxdy$

II. $\displaystyle\int_1^2 \int_1^{y^2} \sin(x^2+y^2) dxdy$

III. $\displaystyle\int_1^4 \int_{\sqrt{y}}^2 \sin(x^2+y^2) dxdy$

IV. $\displaystyle\int_{\arctan(1/2)}^{\arctan(2)} \int_{\tan(v)\sec(v)}^{2\sec(v)} u\sin(u^2) dudv$

P2. Considere los paraboloides $z = x^2 + y^2$ y $z = 5 - 4x^2 - 4y^2$, y la región $\mathcal{R}$ encerrada por ellos.

a) Calcule el volumen de $\mathcal{R}$.

b) Calcule el área de la suprficie $S = \mathrm{fr}(\mathcal{R}) \cap \{(x,y,z), z > 1\}$. Puede seguir los siguientes pasos:

  I) Encuentre una parametrización $r(u,v)$ de S.

  II) Calcule $\dfrac{\partial r}{\partial u}$, $\dfrac{\partial r}{\partial v}$, $\dfrac{\partial r}{\partial u} \times \dfrac{\partial r}{\partial v}$. Concluya.

P3. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y coerciva. Demuestre que f tiene mínimo global.

P4. Sea $f : \Omega \subseteq \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ continua y no negativa, tal que

$$\lim_{\|x\| \to \infty} f(x) = 0$$

Demuestre que f tiene máximo global.

P5. Hallar el máximo y el mínimo de la función $f(x, y, z) = x^2 + yz$ en la bola $B = \left\{x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\right\}$

P6. Sea A la región acotada por $x^2 + 4y^2 = 1$. Calcule $\displaystyle\iint_A \frac{xy}{x^2 + y^2} dxdy$

P7. Usando coordenadas polares, calcule

$$\iint_R \frac{y\sqrt{x^2 + y^2}}{x} dA$$

Donde $R = \left\{(x, y) : \ 1 \leq x \leq 2, \ 0 \leq y \leq x\right\}$