Ingeniería Matemática
FACULTAD DE CIENCIAS FÍSICAS Y MATEMÁTICAS
UNIVERSIDAD DE CHILE
MA3403-4 Probabilidades y Estadística
Otoño 2016

Roberto Cortez
Cristóbal Parraguez
Bryan Sagredo

Pauta Control 2

P1. *a)* (2,5 ptos.) Se anuncia un corte de luz en su sector de la ciudad, por lo cual usted decide cargar 4 baterías para un cierto dispositivo electrónico. Los tiempos que tardan en cargarse son: 5 horas, 3 horas, 1 hora y 1 hora, y usted las va a cargar una después de otra en ese orden. Suponiendo que el tiempo que tarda en cortarse la luz es una variable aleatoria uniforme entre 0 y 12 horas, calcule la esperanza de la cantidad de baterías que quedan *completamente* cargadas.

Solución. Sea X la cantidad de baterías que se cargan completamente, y sea $Y \sim \text{unif}(0,12)$ el tiempo que tarda en cortarse la luz. Es claro que si $Y \in [0,5)$, se cargan 0 baterías; si $Y \in [5,8)$, se carga solamente la primera batería; si $Y \in [8,9)$, se cargan la primera y segunda; si $Y \in [9,10)$, se cargan 3; y si $Y \in [10,12]$ se alcanzan a cargar todas. Como X es una variable discreta tomando los valores $\{0,1,2,3,4\}$, su esperanza se calcula como:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= 0 \times \mathbb{P}(X=0) + 1 \times \mathbb{P}(X=1) + 2 \times \mathbb{P}(X=2) + 3 \times \mathbb{P}(X=3) + 4 \times \mathbb{P}(X=4) \\ &= \mathbb{P}(Y \in [5,8)) + 2 \times \mathbb{P}(Y \in [8,9)) + 3 \times \mathbb{P}(Y \in [9,10)) + 4 \times \mathbb{P}(Y \in [10,12]) \\ &= \frac{3}{12} + 2 \times \frac{1}{12} + 3 \times \frac{1}{12} + 4 \times \frac{2}{12} = \frac{16}{12} = \frac{4}{3}.\end{aligned}$$

b) Decimos que una variable aleatoria X tiene distribución *gamma* de parámetros $\lambda > 0$ y $\theta > 0$ si su densidad es

$$f_X(x) = \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(x),$$

donde Γ es la *función gamma*, definida como $\Gamma(\theta) = \int_0^\infty z^{\theta-1} e^{-z} dz$.

1) (1,5 ptos.) Muestre que $M_X(t) = \lambda^\theta / (\lambda - t)^\theta$ para $t < \lambda$.

Solución. Sabemos que $M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$, luego

$$\begin{aligned}M_X(t) &= \int_0^\infty e^{tx} \frac{\lambda e^{-\lambda x}(\lambda x)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} dx \\ &= \frac{\lambda^\theta}{(\lambda-t)^\theta} \int_0^\infty \frac{(\lambda-t)e^{-(\lambda-t)x}((\lambda-t)x)^{\theta-1}}{\Gamma(\theta)} dx,\end{aligned}$$

donde la última integral vale 1 pues el integrando es la densidad de una variable gamma de parámetros $\lambda - t$ y θ.

2) (1,0 pto.) Deduzca la esperanza y varianza de X.

Solución. Derivemos la f.g.m:

$$\begin{aligned}\frac{dM_X(t)}{dt} &= \frac{d}{dt} \frac{\lambda^\theta}{(\lambda-t)^\theta} = \frac{\theta\lambda^\theta(\lambda-t)^{\theta-1}}{(\lambda-t)^{2\theta}} = \frac{\theta\lambda^\theta}{(\lambda-t)^{\theta+1}}, \\ \frac{d^2 M_X(t)}{dt^2} &= \frac{d}{dt} \frac{\theta\lambda^\theta}{(\lambda-t)^{\theta+1}} = \frac{\theta(\theta+1)\lambda^\theta(\lambda-t)^\theta}{(\lambda-t)^{2\theta+2}} = \frac{\theta(\theta+1)\lambda^\theta}{(\lambda-t)^{\theta+2}}.\end{aligned}$$

Evaluando en $t = 0$ obtenemos el primer y segundo momento: $\mathbb{E}(X) = \frac{dM_X(0)}{dt} = \theta/\lambda$, $\mathbb{E}(X^2) = \frac{d^2M_X(0)}{dt^2} = \theta(\theta+1)/\lambda^2$. Con esto, obtenemos la varianza: $\mathrm{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \theta(\theta+1)/\lambda^2 - (\theta/\lambda)^2 = \theta/\lambda^2$.

3) (1,0 pto.) Sean $X_1, \dots, X_n$ variables independientes con distribución exponencial de parámetro λ. Muestre que $X_1 + \cdots + X_n$ tiene distribución gamma de parámetros λ y n.

Solución. Sabemos que $M_{X_i}(t) = \lambda/(\lambda - t)$ para todo $i \in \{1, \dots, n\}$. Como los X_i son independientes, tenemos que la f.g.m. de $Z = X_1 + \cdots + X_n$ es

$$M_Z(t) = M_{X_1}(t) \times \cdots \times M_{X_n}(t) = \frac{\lambda^n}{(\lambda - t)^n}.$$

Es decir, la f.g.m. de Z coincide con la f.g.m. de una variable gamma con parámetros λ y n. Como la f.g.m. caracteriza la distribución, necesariamente Z tiene dicha ley, es decir, es una variable gamma con parámetros λ y n.

P2. *a)* (3,0 ptos.) n bolitas negras y m moradas se ponen en fila y se permutan al azar. Se define una *racha* como una secuencia consecutiva de bolitas negras (por ejemplo, NNNMMNMNN tiene 3 rachas). Calcule la cantidad esperada de rachas. *Indicación:* defina variables indicatrices adecuadas.

Solución. Para cada posición $i \in \{1, \dots, n+m\}$ en la fila, sea E_i el evento en que comienza una racha en la posición i. Es claro que $\mathbb{P}(E_1) = n/(n+m)$, pues se requiere que la primera bolita sea negra. Para $i \geq 2$ se tiene que $\mathbb{P}(E_i) = \frac{m}{n+m}\frac{n}{n+m-1}$, pues se requiere que la bolita en la posición $i-1$ sea morada, y que en la posición i haya una negra. Si X denota la cantidad de rachas, es claro que $X = \mathbb{1}_{E_1} + \cdots + \mathbb{1}_{E_{n+m}}$, donde $\mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_i}) = \mathbb{P}(E_i)$. Por linealidad de la esperanza, tenemos:

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(X) &= \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_1}) + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_2}) + \cdots + \mathbb{E}(\mathbb{1}_{E_{n+m}}) \\
&= \frac{n}{n+m} + (n+m-1)\frac{m}{n+m}\frac{n}{n+m-1} \\
&= \frac{n(m+1)}{n+m}.
\end{aligned}$$

b) (3,0 ptos.) Sean X e Y variables independientes con ley $\exp(\lambda)$. Calcule la densidad conjunta y las densidades marginales de $U = X + Y$ y $V = X/(X+Y)$. ¿Qué variables conocidas son U y V? ¿Son independientes?

Solución. Es claro que $(X, Y) = g^{-1}(U, V)$, siendo $g^{-1}(u, v) = (uv, u - uv)$. Luego,

$$\det Jg^{-1}(u,v) = \det \begin{bmatrix} v & u \\ 1-v & -u \end{bmatrix} = -vu - u(1-v) = -u.$$

Por el método del jacobiano, la densidad conjunta de (U, V) viene dada por

$$f_{U,V}(u,v) = f_{X,Y}(x,y)|\det Jg^{-1}(u,v)| = f_X(x)f_Y(y)u = \lambda e^{-\lambda x}\lambda e^{-\lambda y}u,$$

para $(x, y) = g^{-1}(u, v) = (uv, u - uv)$, donde en los últimos pasos hemos utilizado que X e Y son variables independientes con ley $\exp(\lambda)$. Notar además que $U = X + Y \in [0, \infty)$ y $V = X/(X+Y) \in [0, 1]$, pues $X \geq 0$ e $Y \geq 0$; luego, la expresión anterior para $f_{U,V}$ es válida para $u \geq 0$ y $v \in [0,1]$, mientras que para otros (u,v) se tiene que $f_{U,V}(u,v) = 0$. Luego:

$$f_{U,V}(u,v) = \lambda^2 e^{-\lambda uv} e^{-\lambda(u-uv)} u \mathbb{1}_{[0,\infty)}(u) \mathbb{1}_{[0,1]}(v) = \lambda^2 u e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(u) \mathbb{1}_{[0,1]}(v).$$

Como lo anterior se separa en producto de una parte que depende de u y otra de v, es directo que U y V son independientes, y además $f_U(u) = \lambda^2 u e^{-\lambda u} \mathbb{1}_{[0,\infty)}(u)$ y $f_V(v) = \mathbb{1}_{[0,1]}(v)$. Luego, $U \sim \text{gamma}(\lambda, 2)$ y $V \sim \text{unif}(0,1)$.

P3. Decimos que la variable aleatoria X tiene distribución de *Pareto* con parámetros $m, \alpha > 0$, anotado $X \sim \text{Pareto}(m, \alpha)$, si su densidad está dada por

$$f_X(x) = \frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}} \mathbb{1}_{[m,\infty)}(x).$$

a) (1,2 ptos.) Calcule $\mathbb{E}(X)$, indicando para cuáles valores es finita.

Solución. Calculemos la esperanza y veamos cuándo ésta da infinito:

$$\mathbb{E}(X) = \int_m^\infty x \frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha m^\alpha \int_m^\infty x^{-\alpha} dx.$$

Para $\alpha = 1$ la primitiva es $\log(x)$, con lo cual obtenemos que $\mathbb{E}(X) = \alpha m^\alpha \log(x)|_m^\infty$, lo cual vale ∞. Para $\alpha \neq 1$, tenemos:

$$\mathbb{E}(X) = \alpha m^\alpha \left. \frac{x^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} \right|_m^\infty = \begin{cases} \infty & \text{si } -\alpha+1 > 0 \\ -\alpha m^\alpha \frac{m^{-\alpha+1}}{-\alpha+1} & \text{si } -\alpha+1 < 0. \end{cases}$$

En resumen, la esperanza de X es infinita para $\alpha \leq 1$, y es finita para $\alpha > 1$, siendo $\alpha m/(\alpha-1)$ su valor.

b) (1,2 ptos.) Calcule $\text{var}(X)$, indicando para cuáles valores es finita.

Solución. Calculemos la varianza y veamos cuándo da infinito:

$$\mathbb{E}(X^2) = \int_m^\infty x^2 \frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha m^\alpha \int_m^\infty x^{-(\alpha-1)} dx.$$

Poniendo $\beta = \alpha - 1$ y analizando la integral con el mismo razonamiento de la parte previa, se concluye que $\mathbb{E}(X^2)$ vale infinito cuando $\beta \leq 1$, es decir, cuando $\alpha \leq 2$. Para $\alpha > 2$, tenemos:

$$\mathbb{E}(X^2) = \alpha m^\alpha \left. \frac{x^{-\alpha+2}}{-\alpha+2} \right|_m^\infty = \frac{\alpha m^2}{\alpha-2},$$

y entonces

$$\text{var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - \mathbb{E}(X)^2 = \frac{\alpha m^2}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2 m^2}{(\alpha-1)^2} = \frac{\alpha m^2}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}.$$

c) (1,2 ptos.) Sea $Y \sim \exp(\lambda)$. Muestre que e^Y tiene distribución de Pareto. ¿Con qué parámetros?

Solución. Sea $Z = e^Y$. Para $z \geq 1$ tenemos:

$$\mathbb{P}(Z > z) = \mathbb{P}(e^Y > z) = \mathbb{P}(Y > \log(z)) = e^{-\lambda \log(z)} = \frac{1}{z^\lambda},$$

donde en el penúltimo paso hemos utilizado que $\mathbb{P}(Y > y) = e^{-\lambda y}$ pues $Y \sim \exp(\lambda)$. Luego, tenemos que $F_Z(z) = 1 - \frac{1}{z^\lambda}$ para $z \geq 1$, mientras que $F_Z(z) = 0$ para $z < 1$. Derivando, obtenemos $f_Z(z) = \frac{\lambda}{z^{\lambda+1}} \mathbb{1}_{[1,\infty)}$, es decir, $Z \sim \text{Pareto}(1, \lambda)$

d) (1,2 ptos.) Sea $k > m$. Muestre que, condicional en el evento $X > k$, la variable X tiene distribución de Pareto de parámetros k y α. Es decir, muestre que $\mathbb{P}(X > x \mid X > k) = \mathbb{P}(Y > x)$ para todo $x \geq k$, donde $Y \sim \text{Pareto}(k, \alpha)$.

Solución. Notemos primero que $\mathbb{P}(X > x) = \int_x^\infty \frac{\alpha m^\alpha}{z^{\alpha+1}} dz = \frac{m^\alpha}{x^\alpha}$ para $x \geq m$. Con esto, y usando la definición de probabilidad condicional, tenemos para $x \geq k$:

$$\mathbb{P}(X > x \mid X > k) = \frac{\mathbb{P}(X > x, X > k)}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{\mathbb{P}(X > x)}{\mathbb{P}(X > k)} = \frac{m^\alpha / x^\alpha}{m^\alpha / k^\alpha} = \frac{k^\alpha}{x^\alpha}.$$

Por el cálculo previo, lo anterior corresponde a $\mathbb{P}(Y > x)$, siendo $Y \sim \text{Pareto}(k, \alpha)$.

e) (1,2 ptos.) La distribución de Pareto suele utilizarse para modelar la distribución de la riqueza en un país, siendo $f_X(x)$ la densidad de personas que poseen riqueza x, y $\mu = \mathbb{E}(X)$ representa la riqueza total del país. Para un cierto valor α^*, la distribución cumple la "ley 80-20": el 80 % de la riqueza la posee el 20 % de la población, es decir, $\int_b^\infty x f_X(x) dx = 80\,\% \times \mu$, donde b es tal que $\mathbb{P}(X > b) = 20\,\%$. Calcule el valor de α^*.

Solución. Primero calculemos b: usando el cálculo de la parte previa, tenemos que $\frac{1}{5} = \mathbb{P}(X > b) = \frac{m^\alpha}{b^\alpha}$, luego $b = m 5^{1/\alpha}$. Por lo hecho en el primer ítem, tenemos que $\mu = \alpha m / (\alpha - 1)$ para $\alpha > 1$. Imponiendo la otra condición, tenemos:

$$\frac{4}{5}\mu = \frac{4}{5}\frac{\alpha m}{\alpha - 1} = \int_b^\infty x \frac{\alpha m^\alpha}{x^{\alpha+1}} dx = \alpha m^\alpha \int_b^\infty x^{-\alpha} dx = \frac{\alpha m^\alpha}{(\alpha - 1) b^{\alpha-1}}.$$

Reemplazando $b = m 5^{1/\alpha}$ obtenemos $\frac{4}{5} m = \frac{m^\alpha}{m^{\alpha-1} 5^{1-1/\alpha}}$. Despejando, se obtiene que el valor buscado es $\alpha^* = \log(5)/\log(4)$.