

EXAMEN

18 de agosto de 2016

Tiempo: 3 horas

- P1.** a) Usted posee 10 pares de calcetines blancos y 20 pares azules, de los cuales extrae 16 calcetines al azar y los aparea de acuerdo a su color. Sea X la variable que denota la cantidad de *pares* blancos obtenidos.
- 1) (1,0 pto.) Indique el rango de X .
 - 2) (2,0 ptos.) Calcule la distribución de X .
- b) Su pókemon favorito aparecerá en las cercanías de la Facultad en un instante distribuido uniformemente entre las 9:00 y las 18:00, pero usted tiene un examen entre las 12:00 y las 15:00 y no podrá atraparlo mientras lo rinde. Si aparece antes de las 12:00, la probabilidad que usted lo atrape es $1/2$, pero si aparece después de las 15:00, la probabilidad es de $1/8$.
- 1) (1,0 pto.) Calcule la probabilidad de atraparlo.
 - 2) (2,0 ptos.) Suponiendo que usted logró atrapar al pokémon, calcule la probabilidad de que éste haya aparecido después de las 11:00.
- P2.** a) Sea X una variable aleatoria con densidad $f_X(x) = \theta^{-2} x e^{-x/\theta} \mathbf{1}_{[0, \infty)}(x)$, donde $\theta > 0$ es un parámetro desconocido.
- 1) (1,5 ptos.) Muestre que $E(X) = 2\theta$ y $\text{var}(X) = 2\theta^2$.
 - 2) (1,5 ptos.) Considere una m.a.s. X_1, \dots, X_n proveniente de la distribución de X . Calcule el estimador de máxima verosimilitud de θ , muestre que es insesgado, y que converge casi seguramente a θ cuando $n \rightarrow \infty$.
- b) (3,0 ptos.) Se requiere medir, con la mayor precisión posible, el diámetro d (en metros) de un asteroide que orbita el sistema solar. Se dispone de un instrumento de medición adecuado, pero cada vez que se mide, no se obtiene exactamente d , sino que una variable aleatoria cuya distribución es desconocida, pero que puede asumirse que tiene esperanza d y varianza de 10000. Usted planea tomar varias mediciones independientes y estimar d usando el promedio. ¿Cuántas mediciones necesita tomar para que, con probabilidad (aproximada) de 95,44%, el error de su estimación sea inferior a 5 metros?
- P3.** a) (3,0 ptos.) Al discutir los efectos del cambio climático en su ciudad natal, usted argumenta que los inviernos son notoriamente más fríos que hace dos décadas, mientras que una amiga suya plantea que eso no es posible porque los efectos del cambio climático son a más largo plazo. Para zanjar la discusión, se accede a los datos de la temperatura más fría del año entre 1989 y 1996, y lo mismo entre 2009 y 2016, obteniendo promedios de 2,5 y 1,2 y desviaciones estándar de 1,0 y 1,0, respectivamente. Suponiendo muestras normales con igual varianza, plantee las hipótesis correspondientes, calcule el p -valor del test, e indique su conclusión para un nivel de 5%.
- b) (3,0 ptos.) Una autopista posee 4 pistas, y se desea investigar si los conductores tienen preferencia por alguna de ellas. Se observó la pista por la que transitaban 1000 automóviles, cuyos resultados se resumen en la siguiente tabla. Calcule el p -valor (o una aproximación) del test correspondiente, e indique su conclusión para $\alpha = 5\%$.



Pista	1	2	3	4
Cantidad observada	265	220	260	255

Estadístico comparación de medias: $T = (\bar{X} - \bar{Y}) / (S \sqrt{\frac{1}{n} + \frac{1}{m}})$, donde $S^2 = [(n-1)S_X^2 + (m-1)S_Y^2] / (n+m-2)$.

Estadístico bondad de ajuste: $\Delta = n \sum_{j=1}^k (\hat{p}_j - p_j^0)^2 / p_j^0$.

Estadístico tabla de contingencia: $\Delta = n \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (\hat{p}_{ij} - \hat{p}_i^X \hat{p}_j^Y)^2 / (\hat{p}_i^X \hat{p}_j^Y)$.