

Capítulo 10

Capa Límite

Un cuerpo que este inmerso en un flujo experimenta una fuerza resultante debido a la acción entre el flujo y el cuerpo. Esta es la fuerza resultante de los esfuerzos de corte en la pared del cuerpo (τ_w) y de los esfuerzos normales a la superficie. La resultante de las fuerzas en dirección horizontal se denomina Arrastre (D) y las fuerza con dirección vertical se denomina Empuje o sustentación (L).

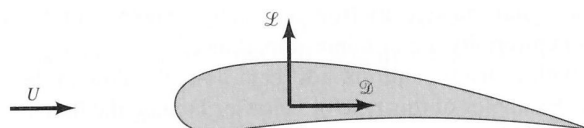


Figura 10.1: Resultante de fuerzas horizontal y vertical sobre un perfil alar.

La magnitud de estas fuerzas dependerá de la forma que tome el flujo alrededor del cuerpo y por lo tanto de la forma del cuerpo, de las condiciones del flujo y de la posición relativa del cuerpo con respecto al flujo. La figura 10.2 muestra el flujo alrededor de 3 cuerpos con distinta forma.

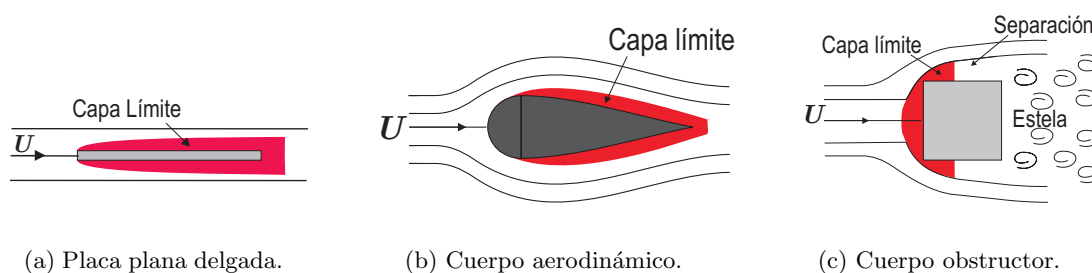


Figura 10.2: Flujo alrededor de diferentes cuerpos.

La influencia sobre el flujo para el caso de la placa plana delgada paralela al flujo es mínima y las líneas de corriente tenderán a ser paralelas a la placa. Alrededor de un cuerpo aerodinámico el flujo que se establece es tal que las líneas de corriente se cierran detrás del cuerpo. Alrededor de un cuerpo obstructor por el contrario, las líneas de corriente no son capaces de cerrarse detrás del cuerpo generando detrás de este lo que se conoce como estela.

La figura 10.3 muestra el flujo alrededor de una placa plana paralela al flujo para distintos números de Reynolds. Se puede ver de esta figura que a medida que aumenta Re disminuye la región donde los efectos viscosos son importantes y por lo tanto también su influencia en el flujo externo.

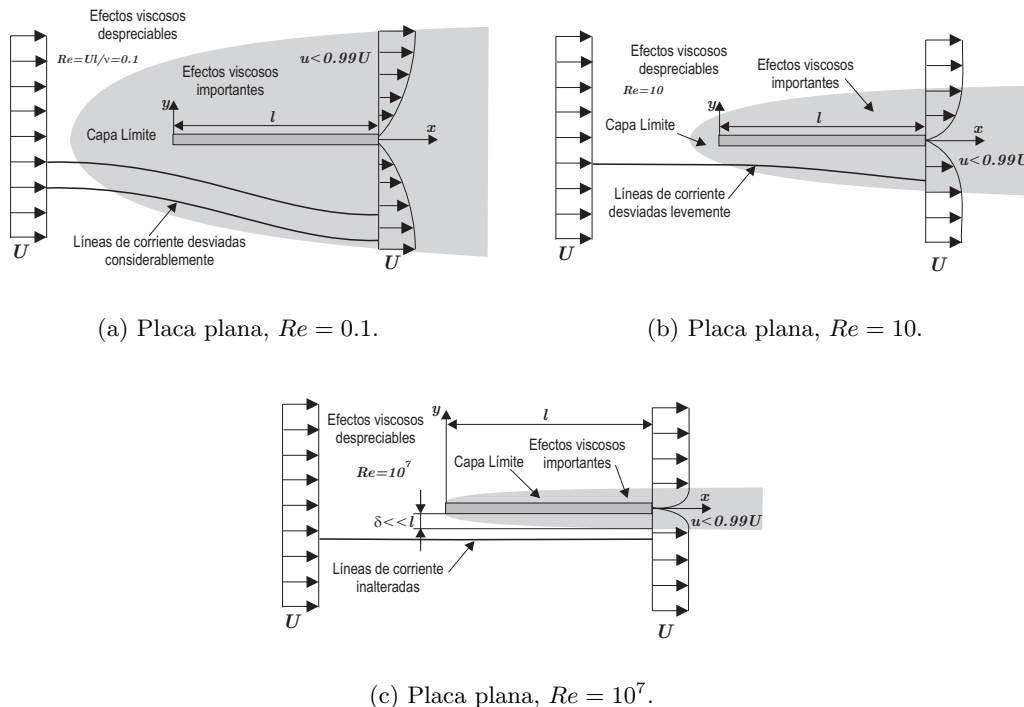


Figura 10.3: Flujo alrededor de una placa plana para diferentes Re .

Se denomina Capa límite a la región alrededor de un cuerpo en la cual los efectos viscosos (τ) no son despreciables. Como se vio anteriormente los esfuerzos de corte están asociados a gradientes de velocidad por lo que en la capa límite los gradientes de velocidad no son despreciables. Se debe recordar que las partículas fluidas en contacto con un cuerpo tienen la misma velocidad del cuerpo. Lo anterior indica que existe una diferencia de velocidades entre el contorno del cuerpo y el flujo libre lejos del cuerpo. Fuera de la capa límite se puede considerar el flujo como ideal.

En este capítulo se verá, en una primera parte, el desarrollo teórico-empírico de las ecuaciones que gobiernan el flujo dentro de la capa límite sobre una placa plana delgada paralela al flujo. En una segunda parte se analizarán los efectos que la curvatura de los cuerpos produce sobre el flujo y su influencia en la interacción dinámica entre el flujo y el cuerpo (lease sustentación y arrastre). Se considerará, para efectos de estos apuntes, que el flujo es incompresible y permanente.

10.1 Desarrollo de la capa límite

La figura 10.4 muestra el desarrollo de la capa límite sobre una placa plana inmersa en un flujo para un número de Reynolds elevado. δ es el espesor de la capa límite, es decir, es el límite de la región donde los esfuerzos de corte no son despreciables. El número de Reynolds se define como:

$$Re = \frac{\rho U x}{\mu}. \quad (10.1)$$

En una primera parte se desarrolla la capa límite laminar (x pequeño $\rightarrow Re$ pequeño). En esta región el flujo es laminar por lo que las partículas se encontrarán sometidas a esfuerzos de corte laminar y no existirá mezcla entre las capas. El espesor de la capa límite δ aumenta con x debido al flujo que entra en esta región desde la corriente libre. Como Re es una función de la posición x sobre la placa, éste aumenta con x . Lo anterior indica que para una placa dada y una velocidad de la corriente libre U dada siempre se alcanzará el régimen turbulento siempre y cuando la placa sea lo suficientemente larga. Por lo tanto, si la placa es lo suficientemente larga, existirá un punto de transición (en realidad existe una zona de transición) donde el régimen se torna turbulento. La aparición de un régimen turbulento esta asociado a un aumento notable en el espesor de la capa límite. En esta región las partículas estarán sometidas a deformaciones en todas direcciones y existirá mezcla o difusión entre las distintas capas del fluido.

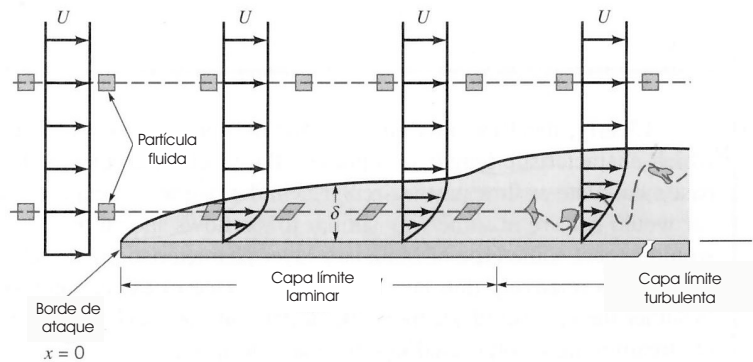


Figura 10.4: Desarrollo de la capa límite sobre una placa plana.

En la zona cercana a la placa las velocidades relativas entre el flujo y la placa son pequeñas generando una zona donde el flujo es laminar. Esta región se denomina sub-capa laminar. Se puede ver también de la figura 10.4 que las partículas que pasan fuera de la capa límite no se encuentran sometidas a deformaciones y, por lo tanto, tampoco a esfuerzos de corte.

En cuerpos curvados existe una aceleración de las partículas fluidas en la parte anterior del cuerpo hasta el punto de mayor espesor (líneas de corriente se juntan). Pasado este punto el flujo se desacelera (líneas de corriente se abren) y aumenta la presión. Si la curvatura del cuerpo es muy grande, y dependiendo de las condiciones del flujo, se puede generar un flujo inverso y lo que se denomina desprendimiento de la capa límite (sección 10.6). Detrás del cuerpo se generará un zona denominada estela (Fig. 10.5).

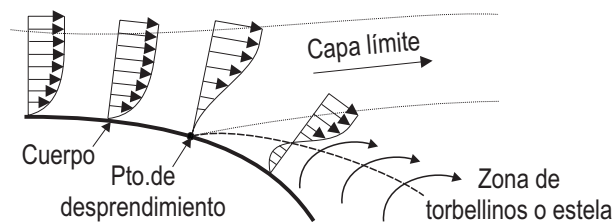


Figura 10.5: Desprendimiento y flujo inverso en un cuerpo curvo.

10.2 Espesor de capa límite

Hasta aquí se ha definido la capa límite como la región del flujo donde los esfuerzos viscosos, y por lo tanto los gradientes de velocidad, son importantes. Ya que la aproximación de la velocidad del flujo entre el cuerpo y el flujo libre es asintótica, no existe en realidad un límite determinado para definir el espesor de la capa límite. Debido a lo anterior se ha definido (en forma arbitraria) el espesor δ como la distancia a la pared donde la velocidad es igual a un 99% la velocidad de la corriente libre (Fig. 10.6).

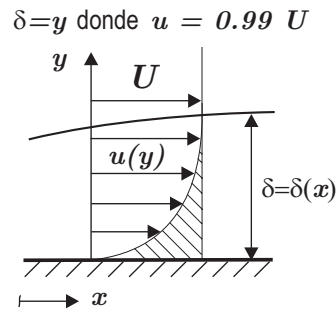


Figura 10.6: Espesor de la capa límite δ .

Otra forma de definir la capa límite es considerar el hecho de que la existencia de un gradiente de velocidades en la región cercana al cuerpo tiene como consecuencia una disminución tanto del caudal másico como de la cantidad de movimiento del flujo que pasa por esta región si se le compara con un flujo no viscoso. Este tipo de definición elimina la arbitrariedad de la definición anterior. Se define el espesor de desplazamiento δ^* (ec. 10.3) como la distancia a la que habría que desplazar el contorno del cuerpo si se supone que no existe roce pero se mantiene el caudal másico real.

$$\Delta q = \int_0^{\infty} (U - u) dy = \delta^* U \quad (10.2)$$

\Rightarrow

$$\delta^* = \int_0^{\infty} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (10.3)$$

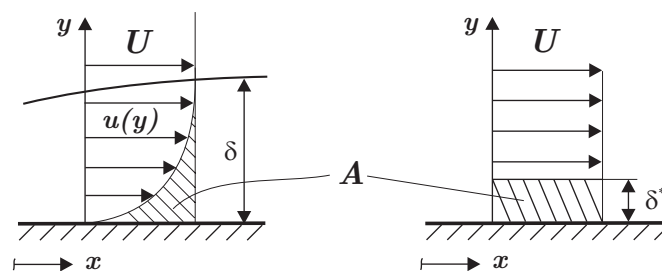


Figura 10.7: Espesor de desplazamiento δ^* .

Se define el espesor de cantidad de movimiento Θ (ec. 10.5) como la distancia a la que habría que desplazar el contorno del cuerpo suponiendo que no hay roce pero se mantiene el flujo de cantidad de movimiento del flujo viscoso (Fig. 10.7), es decir:

$$\rho U^2 \Theta = \rho \int_0^{\infty} u(U - u) dy \quad (10.4)$$

\Rightarrow

$$\Theta = \int_0^{\infty} \frac{u}{U} \left(1 - \frac{u}{U}\right) dy. \quad (10.5)$$

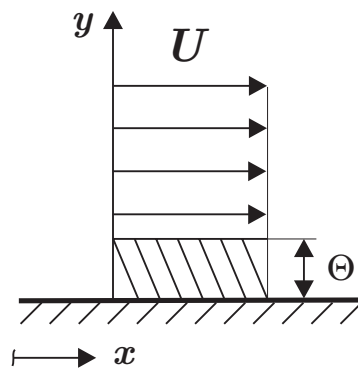


Figura 10.8: Espesor de cantidad de movimiento Θ .

Tanto el espesor de la capa límite como el espesor de desplazamiento y el espesor de cantidad de movimiento son funciones de la coordenada $x \Rightarrow$

$$\delta = \delta(x)$$

$$\delta^* = \delta^*(x)$$

$$\Theta = \Theta(x)$$

10.3 Capa límite laminar

Las ecuaciones que gobiernan el flujo viscoso en la capa límite son las ecuaciones de Navier Stokes. Consideraremos en el siguiente desarrollo un flujo bidimensional, permanente y laminar. Las ecuaciones de Navier Stokes para este caso son

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right), \quad (10.6)$$

$$u \frac{\partial v}{\partial x} + v \frac{\partial v}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial y} + \nu \left(\frac{\partial^2 v}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 v}{\partial y^2} \right). \quad (10.7)$$

Además se cuenta con la ecuación de continuidad

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (10.8)$$

Hasta la fecha no se ha encontrado una solución analítica al sistema de ecuaciones anterior. Debido a esto se realizan una serie de aproximaciones para obtener un sistema de ecuaciones más simple. Estas aproximaciones se basan en la magnitud relativa de los valores de las variables involucradas dentro de la capa límite y son:

1. $(\delta/x) \ll 1$. Válida lejos del borde de ataque.
2. $(\delta^*/x) \ll 1$.
3. $(\Theta/x) \ll 1$.
4. $v \ll u$.
5. $\frac{\partial}{\partial x} \ll \frac{\partial}{\partial y}$.

Alguna de éstas aproximaciones son solo válidas para números de Reynolds altos ($Re > 1000$). Introduciendo las hipótesis anteriores el sistema de ecuaciones se reduce a

$$u \frac{\partial u}{\partial x} + v \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} \frac{\partial p}{\partial x} + \nu \frac{\partial^2 u}{\partial y^2}, \quad (10.9)$$

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0. \quad (10.10)$$

Para la variación de la presión con x se puede suponer que el flujo de la corriente principal impone su distribución de presiones dentro de la capa límite, es decir, $\frac{\partial p}{\partial x}$ dentro de la capa límite es igual al $\frac{\partial p}{\partial x}$ existente fuera de la capa límite, el cual se puede determinar mediante un análisis de flujo potencial. Lo anterior indica que para una placa delgada, donde las líneas de corriente son paralelas a la placa y por lo tanto no existe una variación de la velocidad y por lo tanto tampoco de la presión (ec. 4.2) el término $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$.

Las condiciones de borde, necesarias para resolver el sistema de ecuaciones, son $u = v = 0$ para $y = 0$ y $u \rightarrow U$ cuando $y \rightarrow \infty$.

De un análisis dimensional se puede determinar que el número de Reynolds (Re_x) es del orden de magnitud de $(1/\delta^2)$, es decir

$$\delta \propto \left(\frac{\nu x}{U} \right)^{1/2} = x \left(\frac{\nu}{Ux} \right)^{1/2}$$

\Rightarrow

$$\frac{\delta}{x} \propto Re_x^{-1/2}. \quad (10.11)$$

Blasius resolvió las ecuaciones simplificadas de Navier Stokes para el caso de la placa delgada (donde $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$) encontrando que la constante de proporcionalidad de la ecuación anterior es 4.96 \Rightarrow

$$\frac{\delta}{x} = 4.96 Re_x^{-1/2}. \quad (10.12)$$

Análogamente, para el espesor de desplazamiento y el espesor de cantidad de movimiento se obtiene

$$\frac{\delta^*}{x} = 1.73 Re_x^{-\frac{1}{2}}. \quad (10.13)$$

$$\frac{\Theta}{x} = 0.664 Re_x^{-\frac{1}{2}}. \quad (10.14)$$

Determinado el perfil de velocidades es posible determinar el esfuerzo de corte que se produce en la pared (τ_w), es decir, para $y = 0$.

$$\tau_w = \mu \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)_{y=0}$$

donde el gradiente del perfil de velocidades se obtiene de la solución de Blasius resultando

$$\tau_w = 0.332 U^{\frac{3}{2}} \sqrt{\frac{\rho \mu}{x}}. \quad (10.15)$$

Se puede apreciar que el esfuerzo de corte decrece con x debido al aumento del espesor de la capa límite δ .

10.3.1 Cantidad de movimiento lineal / Ec. de von Karman

Como resolver las ecuaciones de Navier Stokes analíticamente es prácticamente imposible, salvo en casos muy simplificados, se debe tener una forma alternativa de resolver el problema en forma aproximada. Una forma de resolver este tipo de problemas es aplicando la ecuación de cantidad de movimiento sobre un elemento diferencial de capa límite como se el que muestra la figura 10.9 y realizando aproximaciones sobre el perfil de velocidades tanto dentro como fuera de la capa límite.

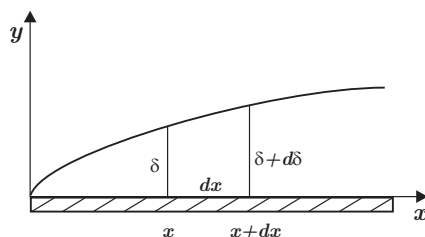


Figura 10.9: Elemento diferencial dentro de la capa límite.

Las fuerzas externas según x que actúan sobre el elemento diferencial de la figura 10.9 son (fig. 10.10):

$$dF_x = p\delta - \left(p + \frac{dp}{dx} dx \right) (\delta + d\delta) + \left(p + \frac{1}{2} \frac{dp}{dx} dx \right) d\delta - \tau_w dx. \quad (10.16)$$

Reordenando se obtiene

$$dF_x = - \left(\delta \frac{dp}{dx} + \tau_w \right) dx. \quad (10.17)$$

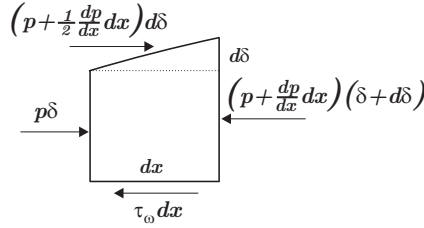


Figura 10.10: Fuerzas externas sobre un elemento de la capa límite.

Esta fuerza neta debe ser igual al flujo neto de cantidad de movimiento que sale del volumen de control (fig. 10.11), es decir,

$$-\left(\delta \frac{dp}{dx} + \tau_w\right) dx = \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u^2 dy \right) dx + U(\rho V dx - \rho U d\delta). \quad (10.18)$$

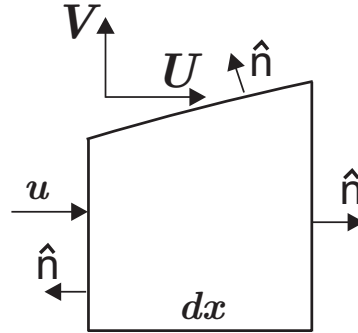


Figura 10.11: Flujo cantidad de movimiento a través del VC.

La ecuación de continuidad para el volumen de control es

$$\int_0^\delta \rho u dy - \rho V dx + \rho U d\delta - \left[\int_0^\delta \rho u dy + \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) dx \right] = 0, \quad (10.19)$$

de donde simplificando y reordenando resulta

$$\rho V dx - \rho U d\delta = -\frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right) dx. \quad (10.20)$$

Reemplazando el resultado anterior en la ecuación 10.18 se obtiene

$$-\delta \frac{dp}{dx} - \tau_w = \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u^2 dy \right) - U \frac{d}{dx} \left(\int_0^\delta \rho u dy \right). \quad (10.21)$$

La ecuación 10.21 se denomina ec. integral de la cantidad de movimiento de von Karman. Para el caso de la placa plana delgada, donde $(dp/dx) = 0$, se cumple que $U = \text{cte.}$, es decir, $U \neq U(x)$

por lo que se puede introducir dentro de la derivada y la integral en el segundo término del lado derecho de la ecuación 10.21. \Rightarrow

$$-\tau_w = \frac{d}{dx} \left(\int_0^{\delta} \rho(u^2 - Uu) dy \right). \quad (10.22)$$

En términos de δ^* y Θ y suponiendo que la variación de presión dentro de la capa límite es igual a la variación fuera de la capa límite, la ecuación 10.21 se puede escribir de la siguiente forma:

$$\frac{\tau_w}{\rho} = \frac{d}{dx} (U^2 \Theta) + \delta^* U \frac{dU}{dx} = U^2 \frac{d\Theta}{dx} + (\delta^* + \Theta) U \frac{dU}{dx}. \quad (10.23)$$

Para el caso de la placa plana delgada resulta

$$\frac{\tau_w}{\rho} = U^2 \frac{d\Theta}{dx}. \quad (10.24)$$

Integrando τ_w sobre toda la superficie se obtiene el arrastre que el fluido ejerce sobre el cuerpo.

En forma general, para calcular el espesor de la capa límite sobre una placa plana que se encuentra inmersa en un flujo laminar, incompresible y permanente se debe:

1. utilizar el gradiente de presiones (dp/dx) determinado para el flujo exterior a la capa límite.
2. Definir o aceptar una forma razonable del perfil de velocidades dentro de la capa límite.
3. Determinar τ_w como $(\partial u / \partial y)_{y=0}$.

Ejemplo

Determinar el espesor de la capa límite que se genera sobre una placa plana delgada suponiendo que el perfil de velocidades dentro de la capa límite es cuadrático.

El perfil de velocidades debe tener la siguiente forma

$$u = \alpha y + \beta y^2$$

donde α y β se deben determinar de las condiciones de borde

$$\left. \begin{array}{l} y = 0 \quad ; \quad u = 0 \\ y = \delta \quad ; \quad u = U \\ y = \delta \quad ; \quad \frac{\partial u}{\partial y} = 0 \end{array} \right\} \Rightarrow \begin{array}{l} \beta = -(U/\delta^2) \\ \alpha = 2(U/\delta) \end{array}$$

\Rightarrow

$$u = 2U \left(\frac{y}{\delta} \right) - U \left(\frac{y}{\delta} \right)^2.$$

Substituyendo el perfil de velocidades anterior en la ecuación 10.22 se obtiene

$$-\nu \frac{\partial \left(2U \left(\frac{y}{\delta} \right) - U \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right)}{\partial y} \Bigg|_{y=0} = \frac{d}{dx} \int_0^{\delta} \left\{ \left[2U \left(\frac{y}{\delta} \right) - U \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right]^2 - U \left[2U \left(\frac{y}{\delta} \right) - U \left(\frac{y}{\delta} \right)^2 \right] \right\} dy.$$

Desarrollando y reordenando se obtiene

$$\frac{\delta}{x} = 5.48 Re_x^{\frac{1}{2}}.$$

Este resultado es del orden de un 10% mayor al obtenido en forma analítica por Blasius. Análogamente se obtiene para el espesor de desplazamiento la siguiente relación

$$\frac{\delta^*}{x} = 1.835 Re_x^{\frac{1}{2}},$$

resultado que es del orden de un 6% superior al resultado de Blasius. Las diferencias existentes entre ambas soluciones son atribuibles a que la solución de la ecuación de von Karman supone un perfil de velocidades de forma conocida y por lo tanto es solo una solución aproximada. La figura 10.12 muestra distintos perfiles típicos de velocidad utilizados para resolver la ecuación 10.22 así como la solución obtenida por Blasius.

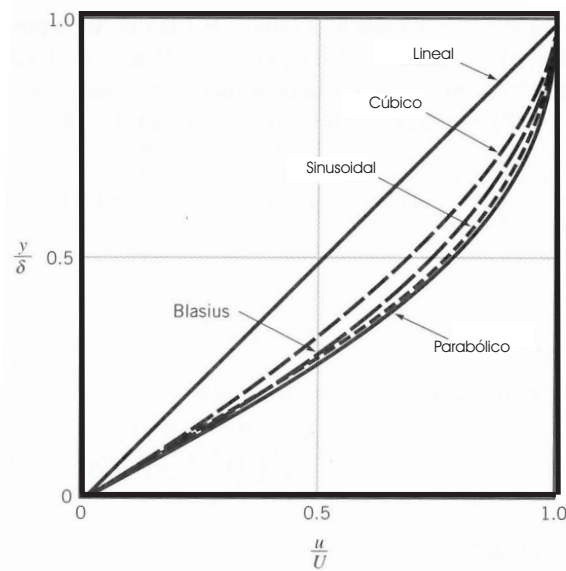


Figura 10.12: Perfiles típicos utilizados en resolver la ecuación de cantidad de movimiento de von Karman.

10.4 Transición a la turbulencia

Los resultados presentados hasta aquí son válidos para la capa límite laminar. Estos resultados concuerdan con mediciones experimentales hasta el punto donde la capa límite se torna turbulenta.

Dado que el número de Reynolds, parámetro principal que gobierna la transición a la turbulencia, es una función de la posición relativa sobre el cuerpo, siempre es posible alcanzar el régimen turbulento en la capa límite, independiente de la velocidad del flujo libre U y del fluido. Para el caso particular de la placa plana basta con que ésta sea lo suficientemente larga.

La transición a la turbulencia depende de varios factores como

1. número de Reynolds Re ,

2. rugosidad de la superficie,
3. curvatura de la superficie,
4. grado de turbulencia de la corriente libre,
5. vibración de la placa.

Para una placa plana y delgada la transición ocurre para un rango de la coordenada x tal que $2 \cdot 10^5 \leq Re_x \leq 3 \cdot 10^6$. La figura 10.13 muestra el efecto del número de Reynolds en el espesor de la capa límite sobre una placa lisa. Se ve que para $Re = 3.2 \cdot 10^5$ el espesor aumenta rápidamente y se puede considerar este valor de Reynolds como crítico para la transición a la turbulencia. Como Re es función de x se puede determinar la posición x a lo largo de la placa en que más probablemente aparecerá la transición a la turbulencia.

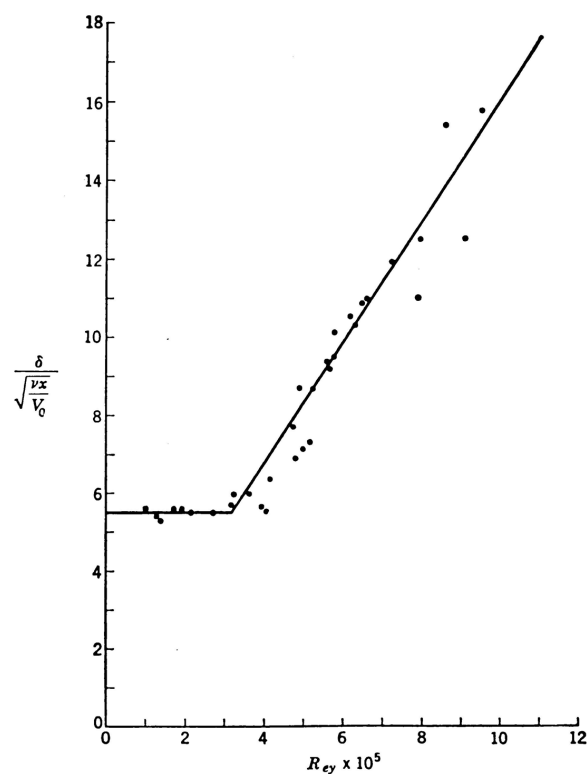


Figura 10.13: Variación del espesor de la capa límite con el número de Reynolds local para el flujo sobre una placa plana.

La figura 10.14 muestra el efecto de el grado de turbulencia de la corriente libre sobre la transición para un flujo sobre una placa plana. Las líneas de este gráfico representan los límites entre los distintos tipos de flujo y por lo tanto la curva inferior representa la variación del número de Reynolds crítico con el grado de turbulencia de la corriente libre U'/\bar{U} .

La rugosidad de la superficie de la placa producirá un adelantamiento del punto de transición si se le compara con una superficie lisa (pelotas de golf). La transición a la turbulencia conlleva también una variación notable del perfil de velocidades dentro de la capa límite como se puede observar en la figura 10.15.

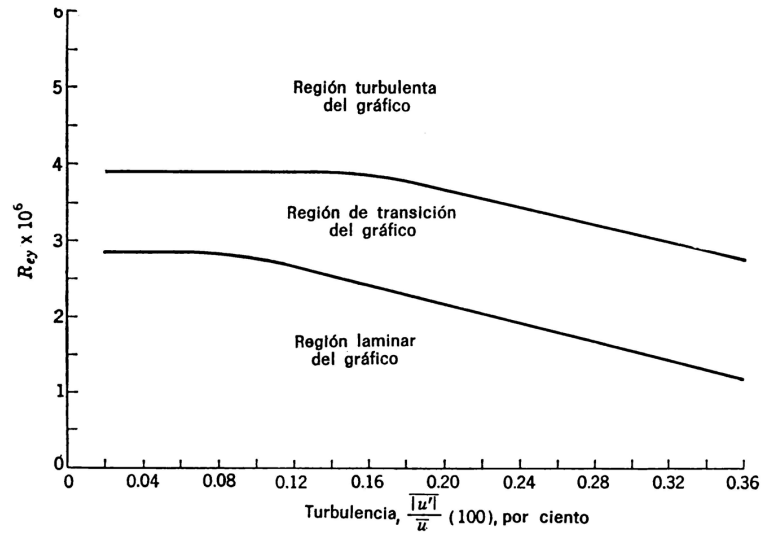


Figura 10.14: Efecto del grado de turbulencia de la corriente libre sobre la transición para el flujo sobre una placa plana.

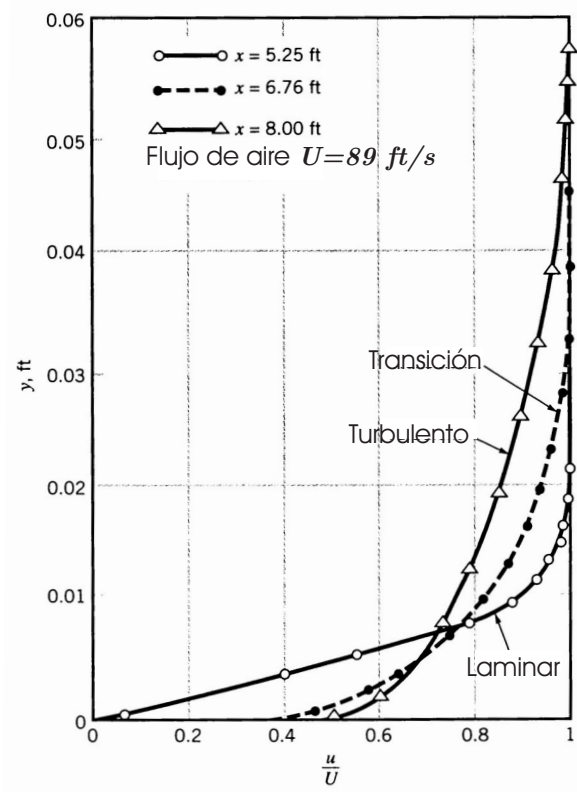


Figura 10.15: Variación típicas del perfil de velocidades para distintos tipos de regímenes.

10.5 Capa límite turbulenta

La estructura de la capa límite turbulenta es muy compleja, irregular y aleatoria. No existe, por lo tanto, una solución exacta para el flujo en ésta zona por lo que se recurre a aproximaciones

y validación experimental.

Utilizaremos la ecuación de von Karman deducida anteriormente, donde u representará la media temporal de la velocidad, es decir, $u = \bar{u}$.

Blasius encontró que para $Re \leq 10^7$ y una superficies lisa se cumple

$$\tau_w = 0.0225 \rho U^2 \left(\frac{\nu}{U \delta} \right)^{1/4}. \quad (10.25)$$

Este resultado puede utilizarse en la ecuación 10.22.

Para el perfil de velocidades se ha determinado que el resultado utilizado en tuberías es una buena aproximación, es decir,

$$u = U \left(\frac{y}{\delta} \right)^{1/7}. \quad (10.26)$$

Reemplazando las ecuaciones anteriores en la ec. de von Karman y desarrollando para una placa plana delgada se obtiene

$$\frac{\delta}{x} = 0.376 Re_x^{-1/5}. \quad (10.27)$$

Para el espesor de desplazamiento y el esfuerzo de corte en la pared se obtienen análogamente los siguientes resultados

$$\delta^* = 0.0463 \left(\frac{\nu}{U} \right)^{1/5} x^{4/5}, \quad (10.28)$$

$$\tau_w = 0.0288 \frac{\rho U^2}{Re_x^{1/5}}. \quad (10.29)$$

Integrando sobre toda la placa es posible determinar la fuerza de arrastre debida a la fricción D_f

$$D_f = \int_0^L b \tau_w dx, \quad (10.30)$$

donde L y b representan el largo y ancho de la placa respectivamente. Desarrollando se obtiene

$$D_f = 0.036 \rho U^2 \frac{\overbrace{bL}^{\text{área } A}}{Re_l^{1/5}}. \quad (10.31)$$

El arrastre se expresa generalmente en términos de un coeficiente de arrastre por fricción C_{Df} de la siguiente forma

$$D_f = C_{Df} \cdot \frac{1}{2} \rho U^2 A \quad (10.32)$$

Donde $A = bL$ es el área de la placa y el término $\frac{1}{2}\rho U^2$ representa la presión de estancamiento para la corriente libre. Despejando se obtiene

$$C_{Df} = \frac{D_f}{\frac{1}{2}\rho U^2 A}. \quad (10.33)$$

Para el caso anterior se cumple que

$$C_{Df} = 0.072 \cdot Re_l^{-\frac{1}{5}}. \quad (10.34)$$

El coeficiente de arrastre por fricción en la placa plana es una función de la rugosidad de la placa y del número de Reynolds como se puede apreciar en el gráfico 10.16.

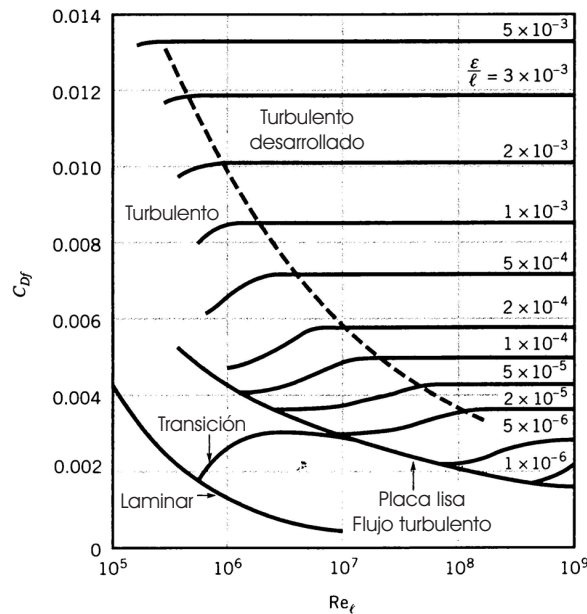


Figura 10.16: Coeficiente de arrastre C_D para una placa plana paralela al flujo ($Re_{crit} = 5 \cdot 10^5$).

Las ecuaciones que aproximan las distintas zonas del gráfico son

$$C_{Df} = \frac{1.328}{Re_l^{0.5}} \quad \text{flujo laminar}$$

$$C_{Df} = \frac{0.455}{(\log Re_l)^{2.58}} - \frac{1700}{Re_l} \quad \text{transición con } Re_{x,c} = 5 \cdot 10^5$$

$$C_{Df} = \frac{0.455}{(\log Re_l)^{2.58}} \quad \text{flujo turbulento, placa lisa}$$

$$C_{Df} = [1.89 - 1.62 \log(e/L)]^{-2.5} \quad \text{flujo turbulento}$$

10.6 Separación / Efecto del gradiente de presión

Hasta ahora se ha analizado el flujo en la capa límite sobre una placa plana delgada, donde consideramos que no existe variación de la presión en la dirección del flujo, es decir $\frac{\partial p}{\partial x} = 0$. Lo

anterior debido a que se supone que el gradiente de presión en la capa límite es igual al gradiente de presión existente fuera de la capa límite y que como la placa es delgada las líneas de corriente son paralelas a la placa por lo que no existe variación de la velocidad y por ende de la presión fuera de la capa límite.

Para cuerpos distintos a una placa plana delgada existe una variación (magnitud y sentido) de la velocidad de la corriente libre alrededor del cuerpo y por lo tanto una variación de la presión $\Rightarrow \frac{\partial p}{\partial x} \neq 0$. Como el flujo tiene que “abrirse” para que pase el cuerpo en la parte anterior de estos se producirá un aumento de la velocidad y una disminución de la presión. Pasado el punto de máximo espesor del cuerpo el flujo se expande nuevamente disminuyendo la velocidad y aumentando la presión. Una consecuencia importante de la existencia de un gradiente de presión es lo que se conoce como separación de la capa límite.

La disminución de la presión en la dirección del flujo se denomina gradiente de presión favorable. El aumento de presión en la dirección del flujo se denomina gradiente de presión adverso ya que tiende a frenar el flujo. Por otro lado, los esfuerzos de corte existentes dentro de la capa límite tienden también a frenar el flujo. Las partículas fluidas tienden a fluir a regiones del flujo donde el gradiente de presión sea menos adverso, generando de ésta manera la separación de la capa límite. Detrás de la zona de separación se produce una reestructuración del flujo que comúnmente se conoce como estela. Como efecto de la separación se produce un aumento notable en el arrastre y una baja en la sustentación.

El punto de separación se caracteriza por tener una velocidad y un gradiente de velocidad nulo en la pared como muestra la figura 10.17.

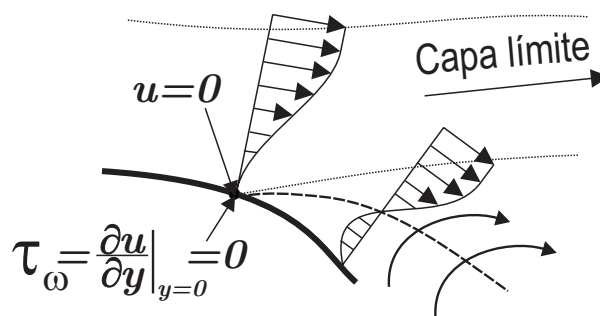


Figura 10.17: Esfuerzo de corte en el punto de separación.

Las ecuaciones de Navier Stokes para la capa límite en la superficie del cuerpo, donde $u = v = 0$, es

$$\frac{1}{\rho} \frac{dp}{dx} = \nu \left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} \quad (10.35)$$

Para el caso de un gradiente de presión favorable, es decir, $\frac{dp}{dx} < 0$ se cumple que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} \right)_{y=0} < 0. \quad (10.36)$$

Al alejarse de la pared del cuerpo y a medida que $y \rightarrow \delta$ se cumple que $u \rightarrow U$ por lo que $\frac{\partial u}{\partial y}$ disminuye con y . Lo anterior indica que no habrá un cambio en la curvatura del perfil de

velocidad entre $y = 0$ e $y = \delta$ en este caso \Rightarrow

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) < 0 \quad \forall y. \quad (10.37)$$

Para el caso de un gradiente de presión adverso, es decir, $\frac{dp}{dx} > 0$ se cumple que

$$\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right)_{y=0} > 0. \quad (10.38)$$

Cerca del borde de la capa límite sin embargo, se sigue cumpliendo que $\left(\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\right) < 0$. Esto indica que existe un cambio de la curvatura (punto de inflexión) del perfil de velocidades entre $y = 0$ e $y = \delta$. De lo anterior se concluye que para que exista la separación debe existir un gradiente de presión adverso. Esta es una condición necesaria pero no suficiente. La separación produce además de un aumento en el arrastre una disminución de la sustentación pudiendo llegar a situaciones extremas como la pérdida total de la sustentación (stall).

En la capa límite turbulenta las partículas fluidas tienen mayor cantidad de movimiento que en una capa límite laminar (esto se puede ver en la diferencia entre los perfiles de velocidad existentes en ambas situaciones) y por lo tanto pueden resistir mejor un gradiente de presión adverso y, por lo tanto, resiste mejor la separación. Analizado desde otro punto, si se adelanta la transición a la turbulencia de la capa límite, se retardará la separación de ésta influyendo positivamente en el arrastre (menor) y la sustentación (mayor). Lo anterior puede ser visto en la figura 10.18 donde, para una misma velocidad de la corriente libre, se ha producido mediante un alambre en la parte anterior de la esfera la transición adelantada a la turbulencia en forma artificial (fig. 10.18(a)) produciendo un retraso en la separación de la capa límite.

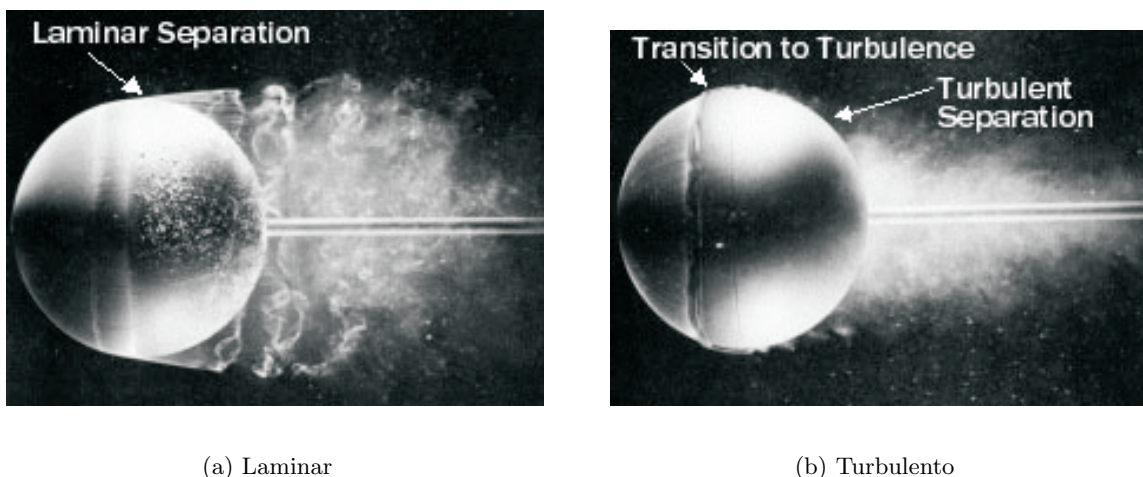


Figura 10.18: Desprendimiento de la capa límite sobre una esfera con y sin generadores de vórtices.

Este fenómeno se utiliza en la práctica por ejemplo en pelotas de golf y en algunos perfiles alares.