Supremo

- A posee supremo, si existe real s tal que
  - → s es cota superior ($\forall x \in A \quad x \leq s$)
  - → s es la menor cota superior

Ínfimo

- A posee ínfimo, si existe real u tal que
  - → u es cota inferior ($\forall x \in A \quad u \leq x$)
  - → u es la mayor cota inferior

Axioma del supremo

- Todo conjunto no vacío y acotado superiormente posee supremo

(Usando $\inf(A) = -\sup(-A)$, A conjunto)

Todo conjunto no vacío y acotado inferiormente posee ínfimo.

Propiedad Arquimediana

$\forall x > 0, \ \exists n \in \mathbb{N}$ tal que $n \cdot x > 1$

- En ejercicios, si se quiere demostrar que un real s es supremo, se puede proceder de la siguiente forma

$\forall \varepsilon > 0 \qquad s - \varepsilon \in$ conjunto. $\Longleftrightarrow$ elemento del conjunto $\geq s - \varepsilon$ (1)

- ¿Cómo relacionar lo anterior con la prop. arquimediana?

Se debe crear la desigualdad (1) a partir de esta propiedad, por lo que se debe tomar un x conveniente, este x conveniente debe estar escrito en función de ε, con $\varepsilon > 0$.

Ejemplo

- $S = \left\{ \dfrac{n-2}{2n+1} : n \in \mathbb{N} \right\}$

$$\frac{n-2}{2n+1} = \frac{1}{2}\,\frac{(n-2)}{\left(n+\frac{1}{2}\right)} = \frac{1}{2}\left(\frac{n+\frac{1}{2}-\frac{1}{2}-2}{n+\frac{1}{2}}\right) = \frac{1}{2}\left(1-\frac{5}{2\left(n+\frac{1}{2}\right)}\right)$$

$$= \frac{1}{2} - \frac{5}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)} < \frac{1}{2} \longrightarrow \text{candidato a supremo}$$

* x conveniente $= \dfrac{5}{4\varepsilon} - \dfrac{1}{2} > 0$, con $\varepsilon > 0$

$\Rightarrow$ por prop. arquimediana, $\exists n \in \mathbb{N}$ tq

$$n > \frac{5}{4\varepsilon} - \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad n + \frac{1}{2} > \frac{5}{4\varepsilon} \quad / (\ )^{-1}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{1}{n+\frac{1}{2}} < \frac{4\varepsilon}{5} \quad / \cdot \frac{5}{4}$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{5}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)} < \varepsilon \quad / \cdot -1$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{-5}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)} > -\varepsilon \quad / + \frac{1}{2}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underbrace{\frac{1}{2} - \frac{5}{4\left(n+\frac{1}{2}\right)}}_{\text{elemento de la sucesión}} > \underbrace{\frac{1}{2} - \varepsilon}_{s-\varepsilon} \quad \Rightarrow s \text{ es supremo}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{2} \text{ es supremo}$$

* Notar que el x conveniente tiene relación con el termino de la sucesión, pues en la sucesión se tiene $n + \frac{1}{2}$, por eso $x = \frac{5}{4\varepsilon} - \boxed{\frac{1}{2}}$