

MA1102-6 Álgebra Lineal  
Profesor: Mauricio Telias H.  
Auxiliar: Arturo Merino F.



## Teorema de Tricotomía

18 de septiembre del 2016

**Teorema.** Sea  $A \in \mathcal{M}_{mn}(\mathbb{R})$  y  $x, b \in \mathbb{R}^n$ . El sistema lineal definido por:

$$Ax = b$$

Satisface una (y sólo una) de las siguientes alternativas:

1. El sistema tiene única solución.
2. El sistema no tiene solución.
3. El sistema tiene infinitas soluciones.

*Demostración.* Notemos que basta con demostrar que el sistema no tiene  $k$  soluciones con  $k > 1$  y finito. Supongamos en busca de una contradicción que el sistema  $Ax = b$  tiene  $k > 1$  soluciones, luego el sistema tiene al menos dos soluciones diferentes  $x$  e  $y$ . Definamos  $z_t = (1 - t)x + ty$ , para  $t \in (0, 1)$ . Notemos que hay infinitos  $z_t$  de la forma anterior. Además

$$\begin{aligned} Az_t &= A(x - tx + ty) \\ &= Ax - tAx + tAy \\ &= (1 - t + t)b \\ &= b \end{aligned}$$

Es decir todo  $z_t$  sería una solución y por tanto habrían infinitas soluciones, lo que contradice el hecho de que el número de soluciones era finito.  $\square$