MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 3 : Invertibilidad

26 de septiembre del 2016

Recordemos:

Pro: $I_{pq}^{-1} = I_{pq}$ y $E_{pq}(\lambda)^{-1} = E_{pq}(-\lambda)$.

Pro: Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$, entonces las proposiciones siguientes son equivalentes:

1. A es invertible.
2. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución única.
3. $\forall b \in \mathbb{K}^n$, $Ax = b$ tiene solución.
4. Sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A. Entonces $\tilde{A}$ no tiene ceros en la diagonal.

Pro: Una matriz triangular superior (o inferior) es invertible si y sólo si no tiene ceros en la diagonal.

Pro: **[Algoritmo de Gauss para invertibilidad]** Para encontrar A^{-1} (con A invertible).

1. Escribir la matriz aumentada $(A|I)$.
2. Escalonar la matriz aumentada obteniendo $(\tilde{A}|B)$.
3. Pasar la matriz aumentada a forma final, obteniendo $(I|B')$.
4. $A^{-1} = B'$

P1. [Análisis de Soluciones]

$$\begin{array}{ccccccccc}
\beta x_1 & & & & & + & \alpha x_4 & = & \alpha \\
x_1 & + & x_2 & + & x_3 & & & = & 0 \\
x_1 & - & x_2 & - & x_3 & & & = & 0 \\
\alpha x_1 & & & + & \beta x_3 & +\alpha x_4 & & = & \beta
\end{array}$$

a) Determine para que valores de $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ el sistema tiene solución única, no tiene solución o tiene infinitas soluciones.

b) Resuelva el sistema para los siguientes casos:

(i) $\alpha = 1, \beta = 1$.

(ii) $\alpha = 0, \beta = 1$.

(iii) $\alpha = 0, \beta = 0$.

P2. [Varios]

a) Invierta; de ser posible, las siguientes matrices:

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & 2 & 4 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 0 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & -2 \end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -2 & -3 \\ 4 & -2 & -3 \end{pmatrix}$$

b) Considere la matriz $B \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$, con

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ a & b & c \\ a^2 & b^2 & c^2 \end{pmatrix}$$

Demuestre que si B es invertible, entonces $(a \neq b) \wedge (b \neq c) \wedge (c \neq a)$.

c) Demuestre que si la suma de los elementos en cada fila de una matriz invertible es k, entonces la suma de los elementos en cada fila de la inversa es $\frac{1}{k}$.

P3. [P3 Control 4, Año 2006]

a) Considere las matrices cuadradas $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{K})$. Demuestre que:

1) A es invertible si y sólo si AA^t es invertible.
2) Si $A^2 = A$ y $B = I - A$ entonces $B^3 = B$. Si A es invertible, utilice las condiciones dadas, para calcular las matrices A y B.

b) Considere los vectores $u, v \in \mathbb{R}^n \setminus \{0\}$. Se define la matriz $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ por $A = uv^t$.

1) Pruebe que para todo $x \in \mathbb{R}^n$:
$$Ax = 0 \iff v^t x = 0$$
Hint: Observe que $v^t x \in \mathbb{R}$.
2) Encuentre el número de variables libres en la resolución del sistema $Ax = 0$. ¿Es A invertible?

P4. [P1 Control 1, Año 2014-β]
Decimos que $U \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es unitaria si $UU^t = I$.

a) Demuestre que si U es unitaria, entonces U es invertible. Demuestre que si U_1 y U_2 son unitarias, entonces su producto U_1U_2, también es unitario.

b) Para $\theta \in \mathbb{R}$ considere la matriz:
$$G(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix}$$
Demuestre que, cualquiera sea $\theta \in \mathbb{R}$, $G(\theta)$ es unitaria y demuestre que $G(\theta)^{-1} = G(-\theta)$.

c) Calcule además $G(\theta)^2$ y luego deduzca una formula para $G(\theta)^n$, $\forall n \in \mathbb{Z}$ (es decir, incluyendo potencias de inversas.)

P5. [Existencia, unicidad y propiedades de la factorización LDU]
Suponga $A \in M_{nn}(\mathbb{R})$ tal que al escalonarla (sin permutar filas), no encontramos pivotes nulos. Se obtiene tras este escalonamiento una matriz triangular superior sin ceros en la diagonal que llamaremos $\tilde{A}$.

a) Demuestre que existe una matriz E tal que $EA = \tilde{A}$, invertible y cuya inversa es triangular inferior con unos en la diagonal. Concluya que $A = L'U'$ donde L' es una matriz triangular inferior con unos en la diagonal y U' una matriz triangular superior que contiene los pivotes en la diagonal.
Hint : Examine las matrices elementales ocupadas al escalonar A.

b) Demuestre que $A = LDU$, donde L es una matriz triangula inferior con unos en la diagonal, D es una diagonal formada por los pivotes, y U es una triangular superior con unos en la diagonal. Esto se conoce como *factorización LDU.*

c) Demuestre que si $B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ admite una factorización LDU, entonces esta es única.

d) Sea $C \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ con factorización LDU y LDU dicha factorización, demuestre que C es simétrica si y solo si $L = U^t$.