MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 5 : Geometría Lineal, Producto Cruz y Proyecciones

12 de octubre del 2016

Recordemos:

Teo: (de Cauchy-Shwarz)

$$|\langle x, y\rangle| \leq \|x\|\|y\|$$

Def: Definimos el determinante de una matriz 2×2 por:

$$\det\begin{pmatrix} a & b \\ c & d\end{pmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d\end{vmatrix} = ad - bc$$

Def: Definimos el determinante de una matriz 3×3 por:

$$\begin{aligned}\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i\end{vmatrix} &= a\begin{vmatrix} e & f \\ h & i\end{vmatrix} - b\begin{vmatrix} d & f \\ g & i\end{vmatrix} + c\begin{vmatrix} d & e \\ g & h\end{vmatrix} \\ &= (aei + bfg + cdh) - (ceg + bi + afh)\end{aligned}$$

Def: Definimos el producto cruz entre dos vectores $\in \mathbb{R}^3$ como:

$$x \times y = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3\end{vmatrix} = \begin{pmatrix} x_2y_3 - x_3y_2 \\ x_3y_1 - x_1y_3 \\ x_1y_2 - x_2y_1\end{pmatrix}$$

Pro: El producto cruz tiene las siguientes propiedades:

- $(x \times y)\perp y \wedge (x\times y)\perp x$
- $x \times y = -y \times x$
- $x \times (y + z) = x \times y + x \times z$
- $(\lambda x) \times y = \lambda(x \times y)$
- $x \parallel y \iff x \times y = 0.$
- $\|x \times y\| = \|x\|\|y\| \sin(\theta)$

Pro: El área de un paralelogramo creado por u y v es $\|u \times v\|$ además el volumen de un paralelepípedo creado por u, v y w es $|\langle u \times v, w\rangle|$.

Def: Un plano puede ser descrito por una ecuación del tipo $\langle x - p, n\rangle = 0$ donde p es un punto del plano y n un vector ortogonal a el. Esto se conoce como ecuación normal.

Def: Una proyección ortogonal es aquella que minimiza la distancia del punto a la recta o plano.

Pro: Consideremos el punto Q y los conjuntos :

$$L \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : x = P + tD \ \ t \in \mathbb{R}\}$$

$$\Pi \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : \langle x - P, N\rangle = 0\}$$

La proyección ortogonal de Q en L es:

$$P + \left\langle Q - P, \frac{D}{\|D\|}\right\rangle \frac{D}{\|D\|}$$

La proyección ortogonal de Q en Π es:

$$Q + \left\langle P - Q, \frac{N}{\|N\|}\right\rangle \frac{N}{\|N\|}$$

P1. [Varios]

a) Demuestre que dos planos Π_1, Π_2 son paralelos si y sólo si son de la forma:

$$\begin{aligned}\Pi_1 : \quad & Ax + By + Cz = R_1 \\ \Pi_2 : \quad & Ax + By + Cz = R_2\end{aligned}$$

Con $R_1 \neq R_2$.

b) Considere las rectas en $\mathbb{R}^3$:

$$Ł_1 : \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + s\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} \quad s \in \mathbb{R} \qquad L_2 : \begin{cases} x - z - 1 = 0 \\ y + z - 2 = 0 \end{cases}$$

1) Argumente que efectivamente L_1 y L_2 son rectas. Muestre que $L_1 \cap L_2 = \emptyset$.
2) Encuentre la ecuación normal de $\Pi \subseteq \mathbb{R}^3$ plano tal que verifique $L_1 \subseteq \Pi$ y $L_2 \cap \Pi = \emptyset$. ¿Es Π único?

c) Sean:

$$P = \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \qquad L: \ P + t\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$$

Encuentre la ecuación cartesiana del plano Π que pasa por P y ortogonal a la recta L.

P2. [Distancia entre planos]
Calcule la distancia entre dos planos paralelos.
Hint: Calcule primero la distancia de un plano a un punto y use la **P1.** *a*).

P3. [P1 Control 2, Año 2013]

a) Sea $P \in \mathbb{R}^3$ un punto y $L \subseteq \mathbb{R}^3$ una recta de vector posición A y vector director d. Asuma que $P \notin L$. Determine el punto Q simétrico de P con respecto a L.

b) Considere las rectas $L : x = A + \lambda d$, $\lambda \in \mathbb{R}$ y $L' = x + B\mu d'$, $\mu \in \mathbb{R}$. Demuestre que el conjunto de puntos simétricos de cada punto de L' con respecto a L es una recta y determine su ecuación vectorial.

c) Para el caso particular de las rectas:

$$L = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \qquad L' = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}$$

escriba la ecuación vectorial descrita en la parte *b*).

P4. [Producto cruz]

a) Demuestre que:

$$L \doteq \{x \in \mathbb{R}^3 : (x - P) \times D = 0\}$$

es una recta.

b) Demuestre que si $x, y, z \in \mathbb{R}^3$ son tales que:

$$\langle x, y\rangle = \langle x, z\rangle \qquad x \times y = x \times z \qquad x \neq 0$$

entonces $y = z$.
Obs: Esto se conoce como la ley de la cancelación conjunta.

c) Sea $a \in \mathbb{R}^3$ fijo. Demuestre que $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$:

$$f(b) = a \times b$$

No es ni inyectiva ni sobreyectiva.

P5. [P3 Control 1, Año 2008-β]
Sea $P = \begin{pmatrix}-3\\2\\2\end{pmatrix}$ y Π_1 el plano que pasa por el origen y tiene por directores $D_1 = \begin{pmatrix}-1\\2\\1\end{pmatrix}$ y $D_2 = \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix}$.

a) Calcule la proyección ortogonal P_0 de P sobre el plano Π_1.

b) Calcule la ecuación de la recta L que ese obtiene como la intersección de Π_1 con el plano Π_2 de ecuación $x + 2y = 2$.

c) Calcule la proyección ortogonal de P_0 sobre la recta L.

d) Calcule la distancia de P a la recta L.