MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Pauta 9 : Transformaciones Lineales

13 de noviembre del 2016

P1. [Varios]

a) Demuestre que las siguientes transformaciones son lineales:

1) $\mathrm{tr} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$.
2) $\mathrm{t} : \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) \to \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, definida por $\mathrm{t}(A) = A^t$.
3) $T : \mathbb{R}^4 \to \mathcal{M}_{22}(\mathbb{R})$, definida por $T(x,y,z,w) = \begin{pmatrix} x & y+w \\ 2x+2y+z+w & x+y+z \end{pmatrix}$.

b) Encuentre Ker y null para las transformaciones anteriores.

c) Encuentre Im y rango para 1) y 2).

Solución 1.

a) 1) Sean $X, Y \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{tr}(\lambda X + Y) &= \sum_{i=1}^{n} (\lambda x_{ii} + y_{ii}) \\ &= \lambda \sum_{i=1}^{n} x_{ii} + \sum_{i=1}^{n} y_{ii} \\ &= \lambda\,\mathrm{tr}(X) + \mathrm{tr}(Y) \end{aligned}$$

2) Sean $X, Y \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, $\lambda \in \mathbb{R}$.

$$\begin{aligned} \mathrm{t}(\lambda X + Y) &= (\lambda X + Y)^t \\ &= \lambda X^t + Y^t \\ &= \lambda\,\mathrm{t}(X) + \mathrm{t}(Y) \end{aligned}$$

3) Sea $\lambda \in \mathbb{R}$ y $(x,y,z,w), (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4$.

$$\begin{aligned} T(\lambda(x,y,z,w) + (a,b,c,d)) &= T(\lambda x + a, \lambda y + b, \lambda z + c, \lambda w + d) \\ &= \begin{pmatrix} \lambda x + a & \lambda y + b + \lambda w + d \\ 2(\lambda x + a + \lambda y + b) + \lambda z + c + \lambda w + d & \lambda x + a + \lambda y + b + \lambda z + c \end{pmatrix} \\ &= \lambda \begin{pmatrix} x & y+w \\ 2x+2y+z+w & x+y+z \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & b+d \\ 2a+2b+c+d & a+b+c \end{pmatrix} \\ &= \lambda T(x,y,z,w) + T(a,b,c,d) \end{aligned}$$

b) 1) Notemos que si $\mathrm{tr}(A) = 0$. entonces $a_{nn} = -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii}$, luego:

$$\mathrm{Ker}(\mathrm{tr}) = \left\{ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & -\sum_{i=1}^{n-1} a_{ii} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : a_{ij} \in \mathbb{R} \right\} \implies \mathrm{null}(\mathrm{tr}) = n^2 - 1$$

2) Calculemos el kernel:

$$\mathrm{Ker(t)} = \{A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R}) : A^t = 0\} = \{0\}$$

3) Por último, sea $r = (x, y, z, w) \in \mathbb{R}^4$

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ker}(T) &= \{r \in \mathbb{R}^4 : T(r) = 0\} \\
&= \left\{ r \in \mathbb{R}^4 : \begin{pmatrix} x & y+w \\ 2x+2y+z+w & x+y+z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\
&= \left\{ r \in \mathbb{R}^4 : x = 0, y+w = 0, 2x+2y+z+w = 0, x+y+z = 0 \right\} \\
&= \left\{ r \in \mathbb{R}^4 : x = 0, y+w = 0, 2y+z+w = 0, y+z = 0 \right\} \\
&= \left\{ r \in \mathbb{R}^4 : x = 0, y+w = 0, y+z = 0 \right\} \\
&= \left\{ r \in \mathbb{R}^4 : x = 0, w = -y, z = -y \right\} \\
&= \left\{ (0, y, -y, -y) \in \mathbb{R}^4 : y \in \mathbb{R} \right\}
\end{aligned}$$

De donde vemos que $\mathrm{null}(T) = 1$.

c) 1) Veamos que $\forall r \in \mathbb{R}$ la matriz

$$M_r = \begin{pmatrix} r & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}$$

es tal que $\mathrm{tr}(M_r) = r$. Es decir tr es una función sobreyectiva, luego $\mathrm{Im(tr)} = \mathbb{R}$ y $\mathrm{rango(tr)} = 1$.

2) Para encontrar la imagen notemos que $\forall M \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ la matriz M^t verifica $\mathrm{t}(M^t) = M$. Es decir t es una función sobreyectiva. Luego $\mathrm{Im(t)} = \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ y por tanto $\mathrm{rango(t)} = n^2$.

P2. [Propiedades de del núcleo y la imagen]
Sea $f : U \to U$ lineal. Demuestre que:

a) $f \circ f \equiv 0 \iff \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f)$.

b) Encuentre una transformación lineal que verifique $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

c) $f \circ f \equiv f \implies U = \mathrm{Ker}(f) \oplus \mathrm{Im}(f)$.

d) Pruebe que si V y W son subespacios de U tal que $V \oplus W = U$, entonces $\exists! T : U \to U$ lineal e idempotente tal que $\mathrm{Ker}(T) = V$ y $\mathrm{Im}(T) = W$.

Solución 2.

a) En efecto:

$$\begin{array}{ll} & f \circ f \equiv 0 \\ \iff & f(f(x)) = 0 \quad \forall x \in U \\ \iff & f(x) \in \mathrm{Ker}(f) \quad \forall x \in U \\ \iff & y \in \mathrm{Ker}(f) \quad \forall y \in \mathrm{Im}(T) \\ \iff & \mathrm{Im}(f) \subseteq \mathrm{Ker}(f). \end{array}$$

b) Notemos que para que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$ necesitamos una función lineal que verifique $f \circ f \equiv 0$. Tomemos por ejemplo $f = \frac{d}{dx} : \mathcal{P}_2 \to \mathcal{P}_2$. Calculemos $\mathrm{Ker}(f)$:

$$\begin{aligned} \mathrm{Ker}(f) &= \{p(x) = ax + b : f(p) = 0\} \\ &= \{p(x) = ax + b : a = 0\} \\ &= \{p(x) = b : b \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

Y además:

$$\begin{aligned} \mathrm{Im}(f) &= \{p(x) = f(ax + b) : a, b \in \mathbb{R}\} \\ &= \{p(x) = a : a \in \mathbb{R}\} \end{aligned}$$

De donde tenemos que $\mathrm{Ker}(f) = \mathrm{Im}(f)$.

c) Probemos primero que $U = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Notemos que si $f \circ f \equiv f$, entonces $f(f(x)) = f(x)$ para todo x. Es decir $f(x) - f(f(x)) = 0$, lo que implica $f(x - f(x)) = 0$, que es lo mismo que $x - f(x) \in \mathrm{Ker}(f)$. Luego todo x se puede escribir como:

$$x = \underbrace{x - f(x)}_{\in \mathrm{Ker}} + \underbrace{f(x)}_{\in \mathrm{Im}}$$

De esto tenemos que $U = \mathrm{Ker}(f) + \mathrm{Im}(f)$. Por último basta chequear que $\mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f) = \{0\}$. Sea $u \in \mathrm{Ker}(f) \cap \mathrm{Im}(f)$, entonces $u = f(x)$ y $f(u) = 0$, luego tenemos que $f(x) = f(f(x)) = 0$ por propiedad del enunciado, y como $f(x) = u$ concluimos que $u = 0$.

d) Tenemos que toda T anterior debe verificar que $T(v) = 0$ para todo $v \in V$. Además si $w \in W$, $T(w) \in W$, sino $T(T(w)) = 0$ (pues $T(w) \in \mathrm{Ker}(T)$) y por tanto $T(w) = 0$ luego T sería identicamente nula y por tanto $\mathrm{Ker}(T) = U$ lo que no es posible (salvo que $W = \{0\}$). Veamos además que:

$$\begin{aligned} T(T(w)) &= T(w) \\ T(T(w) - w) &= 0 \end{aligned}$$

Es decir $T(w) - w \in \mathrm{Ker}(T) = V$, pero además $T(w) - w \in W$ (pues W es espacio vectorial), por tanto $T(w) - w = 0$ y más aún $T(w) = w$. Estamos listos para definir T, recordemos que como $U = V \oplus W$, todo elemento $u \in U$ se puede escribir como $v + w$ donde $v \in V$ y $w \in W$. Luego:

$$T(u) = T(v + w) = T(v) + T(w) = w$$

Está bien definida. Veamos que es lineal, en efecto:

$$\begin{aligned}
T(\lambda u_1 + u_2) &= T(\lambda v_1 + \lambda w_1 + v_2 + w_2) \\
&= T(\lambda v_1 + v_2 + \lambda w_1 + w_2) \\
&= \lambda w_1 + w_2 \\
&= \lambda T(v_1 + w_1) + T(v_2 + w_2) \\
&= \lambda T(u_1) + T(u_2)
\end{aligned}$$

Veamos que es idempotente:

$$\begin{aligned}
T(T(u)) &= T(T(v + w)) \\
&= T(w) \\
&= w \\
&= T(v + w) \\
&= T(u)
\end{aligned}$$

Por último notemos que es única pues toda función lineal que verifique $\mathrm{Ker}(T) = V$ e $\mathrm{Im}(T) = W$ debe verificar lo anterior.

P3. [P1 Examen, Año 2012]

Sea:

$$S = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

a) Encuentre una base de S.

b) Sea $T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^4$ una aplicación lineal tal que $\mathrm{Ker}(T) = S$ y:

$$T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} \qquad T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\-1\\1\\-1\end{pmatrix}$$

Determine explícitamente T.

c) Determine la dimensión de $\mathrm{Im}(T)$ y encuentre una base $\mathrm{Im}(T)$.

Solución 3.

a) Ocuparemos la siguiente proposición: Sea D un conjunto linealmente dependiente y x un elemento tal que se puede escribir como combinación lineal de otros elementos de D, entonces $\langle D\rangle = \langle D \setminus \{x\}\rangle$ (Una demostración de este hecho se puede ver en la pauta de la **P4** *b*) de la auxiliar 8).

Notemos que $(1,1,1,1) = (0,1,1,1) + (1,0,0,0)$, luego:

$$\left\langle \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle = \left\langle \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}2\\3\\3\\3\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} \right\} \right\rangle$$

Además $(3,2,2,2) = 3\cdot(1,0,0,0) + 2\cdot(0,1,1,1)$.

b) Notemos que $(1,0,0,0), (0,1,1,1) \in S = \mathrm{Ker}(T)$. Luego:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} &= T\left(\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right) \\ &= T\begin{pmatrix}0\\1\\1\\1\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} - T\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-1\\1\\-2\\1\end{pmatrix} \end{aligned}$$

Notemos que ahora conocemos a T en la base canónica de $\mathbb{R}^4$, por tanto la conocemos en todo $\mathbb{R}^4$, en efecto:

$$\begin{aligned} T\begin{pmatrix} a\\ b\\ c\\ d \end{pmatrix} &= aT\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + bT\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} + cT\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} + dT\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-b\\ b\\ -2b\\ b\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\0\\c\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}d\\ -d\\ d\\ -d\end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix}-b+d\\ b-d\\ -2b+c+d\\ b-d\end{pmatrix} \end{aligned}$$

De donde tenemos una formula explicita para T.

c) Notemos que la imagen de T es:

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix}-b+d\\ b-d\\ -2b+c+d\\ b-d\end{pmatrix} : b, c, d \in \mathbb{R} \right\}$$

Haciendo el cambio de variable $u = b - d$ y $v = c - d$ nos queda:

$$\mathrm{Im}(T) = \left\{ \begin{pmatrix}-u\\ u\\ -2u+v\\ u\end{pmatrix} : u, v \in \mathbb{R} \right\}$$

De donde tenemos que rango$(T) = 2$.

P4. [Caracterización de Isomorfismo]
La idea de este problema es probar el siguiente teorema:

Teorema. *Dos espacios E y V de dimensión finita son isomorfos si y sólo si* $\dim E = \dim V$.

Para esto proceda como sigue:

a) Muestre que $\dim \mathbb{K}^n = n$.

b) Sea E un espacio vectorial tal que $\dim E = n$. Pruebe que $E \cong \mathbb{K}^n$.

c) Pruebe que si $T : E \to V$ es un isomorfismo y $B = \{b_1, b_2, \ldots, b_n\}$ es una base de E, entonces $T(B)$ es una base de V.

d) Concluya.

Solución 4.

a) Notemos que el conjunto:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1_{\mathbb{K}} \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1_{\mathbb{K}} \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix}, \ldots, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 1_{\mathbb{K}} \end{pmatrix} \right\}$$

Es l.i. (por el argumento usual de que no podemos escribir uno como combinación lineal de los otros) y genera $\mathbb{K}^n$, luego $\dim \mathbb{K}^n = n$.

b) Todo $x \in E$ se puede escribir de manera única como suma de elementos de su base. Luego la función $T : \mathbb{K}^n \to E$, definida por:

$$T \begin{pmatrix} k_1 \\ \vdots \\ k_n \end{pmatrix} = k_1 b_1 + k_2 b_2 + \cdots + k_n b_n$$

Es lineal y biyectiva, luego $\mathbb{K}^n \cong E$.

c) Como T es biyectiva $\forall y \in V, \exists! x$ tal que $T(x) = y$. Luego como B es base de E tenemos que $x = \lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n$ de manera única. Además como y es sobreyectiva todo $y \in V$ se puede escribir como:

$$y = T(x) = T(\lambda_1 b_1 + \cdots + \lambda_n b_n) = \lambda_1 T(b_1) + \cdots + \lambda_n T(b_n)$$

de manera única. Luego aprovechándonos de que un conjunto es base si y solo si todo elemento se puede escribir de manera única como elementos del conjunto concluimos que $T(B) = \{T(b_1), \ldots, T(b_n)\}$ es base.

d)
- ($\Longrightarrow$)
  Directo de la parte *c*) pues ambas bases tienen mismo cardinal.
- ($\Longleftarrow$)
  Si $\dim E = \dim V = n$, entonces $E \cong \mathbb{K}^n$ y $V \cong K^n$, luego como $\cong$ es una relación de equivalencia concluimos que $E \cong V$.

P5. [P2 Control 5, Año 2000]

Sean U y V espacios vectoriales tales que $\dim(U) = n$ y $\dim(V) = m$. Definimos $U \otimes V$ como el espacio vectorial $(U \times V, +, \cdot)$, donde $+$ y $\cdot$ estan definidos por coordenadas, es decir para $u, u_1, u_2 \in E$ y $v, v_1, v_2 \in F$ y $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$(u_1, v_1) + (u_2, v_2) = (u_1 + u_2, v_1 + v_2) \qquad \lambda(u, v) = (\lambda u, \lambda v)$$

Obs: No es necesario verificar que $U \otimes V$ es un espacio vectorial.

a) Sea $f : U \to V$ una función. Definimos su *grafo* por:

$$G_f = \{(u, v) : f(u) = v\}$$

Muestre que f es lineal si y sólo si G_f es un s.e.v. de $U \otimes V$.

b) Demuestre que $(\{0\} \times V)$ es un s.e.v. de $U \otimes V$.

c) Sea $f : U \to V$ lineal. Demuestre que $G_f \oplus (\{0\} \times V) = U \otimes V$.

d) Suponga ahora que U y V son s.e.v. de W tal que $U \cap V = \{0\}$. Demuestre que $U \otimes V \cong U \oplus V$.

Solución 5.

a) Sea $u_1, u_2 \in U$, $v_1, v_2 \in V$ y $\lambda \in \mathbb{R}$ (Notemos que $(u_1, v_1), (u_2, v_2) \in U \otimes V$)

- $(\implies)$
  Sean $(a, f(a)), (b, f(b)) \in G_f$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego:

  $$\lambda(a, f(a)) + (b, f(b)) = (\underbrace{\lambda a + b}_{x}, f(\lambda a + b)) = (x, f(x)) \in G_f$$

  De donde tenemos que G_f es s.e.v.
- $(\impliedby)$
  Si G_f es un s.e.v., entonces para todo $a, b \in U$:

  $$\lambda(a, f(a)) + (b, f(b)) \in G_f$$

  Esto implica que $(\lambda a + b, \lambda f(a) + f(b)) \in G_f$, pero como el elemento anterior esta en G_f debe ser de la forma $(x, f(x))$, luego:

  $$(\lambda a + b, \lambda f(a) + f(b)) = (\lambda a + b, f(\lambda a + b))$$

  De donde tenemos que $\lambda f(a) + f(b) = f(\lambda a + b)$ y por tanto f es lineal.

b) Notemos que $(\{0\} \times V) \neq \emptyset$ (pues $(0, 0)$ está). Sean $(0, a), (0, b) \in (\{0\} \times V)$ y $\lambda \in \mathbb{R}$. Luego:

$$\lambda(0, a) + (0, b) = (0, \lambda a + b) \in (\{0\} \times V)$$

De donde tenemos que $(\{0\} \times V)$ es un s.e.v.

c) Notemos que todo elemento de $U \otimes V$ lo podemos escribir como:

$$(u, v) = \underbrace{(u, f(u))}_{\in G_f} + \underbrace{(0, v - f(u))}_{\in (\{0\} \times V)}$$

De donde tenemos que $G_f + (\{0\} \times V) = U \otimes V$, veamos que la intersección es $\{(0, 0)\}$. Sea $r \in G_f \cap (\{0\} \times V)$, luego como $r \in G_f$, entonces $r = (x, f(x))$. Además $r \in (\{0\} \times V)$ y por tanto $x = 0$, luego:

$$r = (0, f(0)) = (0, 0)$$

De donde tenemos que la intersección es $\{(0, 0)\}$ y por tanto $G_f \oplus (\{0\} \times V) = U \otimes V$.

d) Definamos la función $T : U \otimes V \to U \oplus V$ como:

$$T(u, v) = u + v$$

Veamos que esta función es lineal:

$$\begin{aligned} T(\lambda(u_1, v_1) + (u_2, v_2)) &= T(\lambda u_1 + u_2, \lambda v_1 + v_2) \\ &= \lambda u_1 + u_2 + \lambda v_1 + v_2 \\ &= \lambda(u_1 + v_1) + u_2 + v_2 \\ &= \lambda T(u_1, v_1) + T(u_2, v_2) \end{aligned}$$

Para ver que es biyectiva definamos $F : U \oplus V \to U \otimes V$:

$$F(u + v) = (u, v)$$

Lo anterior esta bien definido pues todo $x \in U \oplus V$ se puede escribir de manera única como $x = u + v$, además:

$$F \circ T(u, v) = F(u + v) = (u, v)$$

Y

$$T \circ F(u + v) = T(u, v) = u + v$$

De donde tenemos que T es invertible y por tanto biyectiva, como además era lineal es un isomorfismo. Concluímos que $U \otimes V \cong U \oplus V$.