MA1102-6 Álgebra Lineal
Profesor: Mauricio Telias H.
Auxiliar: Arturo Merino F.

Auxiliar 11 : Rango, Valores y Vectores Propios

21 de noviembre del 2016

Recordemos:

- Diremos que dos matrices A y B son semejantes si existen P y Q invertibles tales que:
$$A = PBQ$$
Si ademas $Q = P^{-1}$ decimos que son similares.
- Definimos el rango de una matriz A como el rango de la función T_A definida como:
$$T_A(x) = Ax$$
- rango(A) es igual a la cantidad de filas l.i. que tiene A.
- Dos matrices son semejantes si y sólo si tienen el mismo rango.
- Sea A una matriz tal que $\operatorname{rango} A = r$, entonces A es semejante a $\begin{pmatrix} I_r & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.
- $\operatorname{rango}(A) = \operatorname{rango}(A^t)$.
- Diremos que $x \in V$ es una vector propio de T si verifica:
  1. $x \neq 0$
  2. $\exists \lambda \in \mathbb{K}$ tal que $T(x) = \lambda x$.

  Al valor λ que verifica 2. lo llamaremos valor propio asociado a x.
- Definimos el determinante de A de la siguiente manera:
  1. Si A es de 1×1, entonces $|A| = a_{11}$.
  2. En general $|A| = \sum_{i=1}^{n} (-1)^{i+1} a_{i1} |A_{i1}|$
- El determinante tiene muchas propiedades, entre las más importantes se encuentran:
  1. El determinante es una función lineal de las filas.
  2. Si B se obtiene permutando dos filas de A, entonces $|A| = -|B|$.
  3. Sea $\tilde{A}$ un escalonamiento de A y N_σ el numero de permutaciones de filas usadas al escalonar A. Entonces:
  $$|A| = (-1)^{N_\sigma} \prod_{i=1}^{n} \tilde{a}_{ii}$$
  4. A es invertible si y solo si $|A| \neq 0$.
  5. $|AB| = |A||B|$
  6. $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ y $|A^t| = |A|$.
- Definimos el polinomio característico de una matriz A como $p_A(\lambda) = |A - \lambda I|$
- Diremos que λ_0 es valor propio de A si $p_A(\lambda_0) = 0$.
- λ es valor propio de A si y solo si es valor propio de las transformaciones asociadas a A
- Para todo valor propio definimos el espacio propio como
$$W_\lambda = \operatorname{Ker}(A - \lambda I)$$
Los $x \in W_\lambda$ son justamente los vectores propios asociados a λ.

P1. [Varios]

a) Muestre que si A y B son similares, entonces A^n y B^n son similares $\forall n \in \mathbb{N}$. Muestre que además A y B tienen la misma traza y el mismo determinante.

b) Sean $A, B \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$, pruebe que $\operatorname{rango}(AB) \leq \min\{\operatorname{rango}(A), \operatorname{rango}(B)\}$. Suponga ahora que A es invertible, demuestre que $\operatorname{rango}(AB) = \operatorname{rango}(B)$.

c) Encuentre el polinomio característico, valores propios y vectores propios para la siguiente matriz:
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

P2. [Valores y vectores propios]

a) Sea $A \in \mathcal{M}_{22}(\mathbb{C})$, encuentre los valores propios de A respecto a $\det A$ y $\operatorname{tr} A$.

b) Calcule valores y vectores propios de:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$$

c) Calcule valores y vectores propios de:

$$J = \begin{pmatrix} 1 & \dots & 1 \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \dots & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$$

Hint : Trate de escribir J de la forma $J = xx^t$ para algún $x \in \mathbb{R}^n$ adecuado.

d) Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ una matriz tal que $A^2 = -I$, muestre que n es par y además que A no tiene valores propios reales.

P3. [P1 Control 3, Año 2015-β]
Demuestre las siguientes afirmaciones para $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$.

a) A es invertible si y sólo si $\lambda = 0$ no es un valor propio de A.

b) Si A es invertible y $v \in \mathbb{R}^n$ es un vector propio de A, entonces v es un vector propio de A^{-1}.

c) Si n es impar, entonces A admite un valor propio real.

d) Si v es el vector propio asociado al valor propio λ. entonces también es vector propio asociado a λ^k de la matriz A^k.

P4. [Determinantes]

a) Demuestre que si $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ es una matriz tal que:

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ik} = 0 \qquad \forall k \in \{1, \dots, n\}$$

Entonces $\det(A) = 0$.

b) Demuestre que para $x, y, z \in \mathbb{R}$:

$$x + y + z = 0 \implies x^3 + y^3 + z^3 = 3xyz$$

Hint : Use a) con una matriz A adecuada.

c) Alicia y Bob juegan un juego en el cual se toman turnos llenando los coeficientes de una matriz inicialmente vacía de 1102×1102. En cada turno, un jugador escoje un numero real y lo pone en un casillero vacío. Alicia gana si la matriz resultante es invertible, mientras que Bob gana si la matriz resultante no lo es.
Si Alicia tiene el primer turno, encuentre una estrategia tal que Bob siempre gane independiente de lo que haga Alicia.
Hint : Use a) de manera apropiada.

P5. [P2 *a*) Control 3, Año 2012]
Sean $A, B \in \mathcal{M}_{33}(\mathbb{R})$ dadas por:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad B = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Para cada una de ellas calcule valores y vectores propios.