**MA1102-6** Álgebra Lineal
**Profesor :** Mauricio Telias H.
**Auxiliar :** Arturo Merino F.

# Pauta 13 : Ortogonalidad

5 de diciembre del 2016

**P1. [Varios]**

*a*) Demuestre que todo conjunto ortonormal es linealmente independiente.

*b*) Demuestre que $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{C})$ verifica $AA^* = A^*A$, entonces $\|Ax\| = \|A^*x\|$ para todo $x \in \mathbb{C}^n$.

*c*) Sean $U, V \subseteq \mathbb{R}^n$ espacios vectoriales. Demuestre que:

1) $(U^\perp)^\perp = U$.
2) $(U+V)^\perp = U^\perp \cap V^\perp$. Concluya que $(U \cap V)^\perp = U^\perp + V^\perp$.
3) Use las partes anteriores para concluir que $U \oplus V = \mathbb{R}^n \iff U^\perp \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n$.

**Solución 1.**

*a*) Supongamos en busca de una contradicción que $\{v_1, \ldots, v_n\}$ es ortonormal y linealmente dependiente. Sin pérdida de generalidad esto significa que $v_n$ se puede escribir como combinación lineal de los otros, esto es:

$$v_n = \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i$$

Además como $v_n \neq 0$ existe un $\alpha_j \neq 0$. Luego por ortogonalidad $\langle v_n, v_j \rangle = 0$, por otro lado:

$$\begin{aligned}
\langle v_n, v_j \rangle &= \left\langle \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i v_i, v_j \right\rangle \\
&= \sum_{i=1}^{n-1} \alpha_i \underbrace{\langle v_i, v_j \rangle}_{0 \text{ si } i \neq j} \\
&= \alpha_j \underbrace{\langle v_j, v_j \rangle}_{=\|v_j\|^2} \\
&= \alpha_j
\end{aligned}$$

Por tanto $\alpha_j = 0$ lo que no es posible.

*b*) Sea $x \in \mathbb{C}^n$, luego:

$$\begin{aligned}
\|Ax\|^2 &= \langle Ax, Ax \rangle_H \\
&= (Ax)^* Ax \\
&= x^* \underbrace{A^* A}_{AA^*} x \\
&= (A^*x)^* A^* x \\
&= \langle A^*x, A^*x \rangle_H \\
&= \|A^*x\|^2
\end{aligned}$$

Tomando raíz concluímos.

*c*) 1)
- $U \subseteq (U^\perp)^\perp$ :
  Basta con notar que todo vector en $U$ es ortogonal a los de $U^\perp$.

- $(U^\perp)^\perp \subseteq U$ :
  Sea $x \in (U^\perp)^\perp$, luego como $U \oplus U^\perp = \mathbb{R}^n$, tenemos que:

$$x = \underbrace{u}_{\in U} + \underbrace{w}_{\in U^\perp}$$

  Además como $w \in U^\perp$:

$$\begin{aligned} 0 &= \langle x, w \rangle \\ &= \langle u + w, w \rangle \\ &= \underbrace{\langle u, w \rangle}_{=0} + \underbrace{\langle w, w \rangle}_{=\|w\|^2} \end{aligned}$$

  Luego como $\|w\| = 0$, tenemos que $w = 0$. Por tanto:

$$x = u + w = u \in U$$

  De donde se concluye.

2)
- $U^\perp \cap V^\perp \subseteq (U + V)^\perp$ :
  Si $x \in U^\perp \cap V^\perp$, entonces:

$$\langle x, u \rangle = 0 \qquad \langle x, v \rangle = 0 \qquad \forall u \in U, \forall v \in V$$

  Luego $\langle x, u + v \rangle = 0$ es decir $x \in (U + V)^\perp$.
- $(U + V)^\perp \subseteq U^\perp \cap V^\perp$ :
  Si $x \in (U + V)^\perp$

$$\langle x, u + v \rangle = 0 \qquad \forall u \in U, \forall v \in V$$

  Tomando $v = 0$ tenemos que $\langle x, u \rangle = 0$, $\forall u \in U$, es decir $x \in U^\perp$. Analogamente tomando $u = 0$ tenemos que $x \in V^\perp$ de donde se concluye.

Para concluir notemos que:

$$\begin{aligned} (U \cap V)^\perp &= ((U^\perp)^\perp \cap (V^\perp)^\perp)^\perp \\ &= ((U^\perp + V^\perp)^\perp)^\perp \\ &= U^\perp + V^\perp \end{aligned}$$

3)
- $(\implies)$
  Notemos que:

$$\begin{aligned} U^\perp + V^\perp &= (U \cap V)^\perp \\ &= \{0\}^\perp \\ &= \mathbb{R}^n \end{aligned}$$

  Falta ver que la suma es directa, en efecto:

$$\begin{aligned} \dim(U^\perp \cap V^\perp) &= \dim((U \oplus V)^\perp) \\ &= n - \dim(\underbrace{U \oplus V}_{\mathbb{R}^n}) \\ &= 0 \end{aligned}$$

  Luego $U^\perp \cap V^\perp = \{0\}$ y por tanto la suma es directa.
- $(\impliedby)$
  Basta con aplicar lo demostrado anteriormente sobre $U^\perp$ y $V^\perp$. En efecto:

$$U^\perp \oplus V^\perp = \mathbb{R}^n \implies (U^\perp)^\perp + (V^\perp)^\perp = \mathbb{R}^n$$

  De donde se concluye lo pedido.

**P2. [Diagonalización Ortogonal]**
Una matriz $P$ se dirá ortogonal si $PP^t = I$.

*a*) Demuestre que si $P$ es ortogonal, entonces $\det(P) \in \{-1, 1\}$.

*b*) Demuestre que una matriz es ortogonal si y sólo si sus columnas son ortonormales.

*c*) Escriba la matriz:

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$$

de la forma $A = PDP^t$, donde $P$ es invertible y $D$ diagonal.

**Solución 2.**

*a*) Tomando determinante tenemos:

$$\begin{aligned} \det(PP^t) &= \det(I) \\ \det(P)\det(P^t) &= 1 \\ \det(P)^2 &= 1 \\ \det(P) &= \pm 1 \end{aligned}$$

De donde concluimos.

*b*)
- ( $\Longrightarrow$ ):
Notemos que la columna $i$-ésima de $P$ es $Pe_i$ donde $e_i$ es un vector de puros ceros, salvo en la posición $i$ donde tiene un 1. Luego:

$$\begin{aligned} \langle Pe_i, Pe_j \rangle &= (Pe_i)^t Pe_j \\ &= e_i^t \underbrace{P^t P}_{I} e_j \\ &= e_i^t e_j \\ &= \langle e_i, e_j \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

De donde vemos que las columnas son ortonormales.

- ( $\Longleftarrow$ ):
Veamos como es la matriz $P^tP$:

$$\begin{aligned} (pp^t)_{ij} &= \sum_{k=1}^{n} p^t_{ik} p_{kj} \\ &= \sum_{k=1}^{n} p_{ki} p_{kj} \\ &= \langle Pe_i, Pe_j \rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

De donde vemos que la matriz $P^tP$ es la identidad (y por tanto $PP^t$ también).

*c*) Notemos que nosotros sabemos diagonalizar de la forma $A = PDP^{-1}$, notemos que si lograramos construir $P$ de forma ortogonal estariamos listos pues $P^{-1} = P^t$. Tratemos de hacer esto, construyendo una $P$ con columnas ortonormales (y por la parte $b$) tendríamos $PP^t = I$).

Calculemos el polinomio característico:

$$\begin{aligned} p_A(x) &= |A - xI| \\ &= \begin{vmatrix} 2-x & 0 & 1 \\ 0 & 1-x & 0 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= -\begin{vmatrix} 0 & 1-x & 0 \\ 2-x & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)\begin{vmatrix} 2-x & 1 \\ 1 & 2-x \end{vmatrix} \\ &= (1-x)[(2-x)^2 - 1] \\ &= (1-x)^2(3-x) \end{aligned}$$

Luego los valores propios son $\lambda_1 = 1$ y $\lambda_2 = 3$. Veamos los espacios propios:

$$\begin{aligned} W_{\lambda_1} &= \mathrm{Ker}(A - I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \ x + z = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ -x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R}, y \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una base de este espacio sería:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

Notemos que estos vectores son ortogonales, pero no ortonornales. Normalizando obtenemos:

$$\left\{ \begin{pmatrix} \frac{\sqrt{2}}{2} \\ 0 \\ -\frac{\sqrt{2}}{2} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\begin{aligned} W_{\lambda_2} &= \mathrm{Ker}(A - 3I) \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{pmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 0 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = 0 \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : \begin{array}{rcl} -x + z &=& 0 \\ -2y &=& 0 \end{array} \right\} \\ &= \left\{ \begin{pmatrix} x \\ 0 \\ x \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 : x \in \mathbb{R} \right\} \end{aligned}$$

Una base ortonormal de este espacio es:

$$\left\{\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\right\}$$

Notemos que este vector es ortogonal a los otros y por tanto estos tres vectores forman una base ortonormal de $\mathbb{R}^3$. Luego $A = PDP^{-1}$ y como $P$ es ortogonal $A = PDP^t$, es decir:

$$A = \begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ -\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & -\frac{\sqrt{2}}{2}\\ 0 & 1 & 0\\ \frac{\sqrt{2}}{2} & 0 & \frac{\sqrt{2}}{2}\end{pmatrix}$$

**P4. [Matrices Ortogonales]**
Sea $A \in \mathcal{M}_{nn}(\mathbb{R})$ demuestre que $A$ es ortogonal si y sólo si:

- $\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$, $\forall x, y \in \mathbb{R}^n$.
- $\|Ax\| = \|x\|$ $\forall x \in \mathbb{R}^n$.

Más aún si $n = 2$ demuestre que una matriz es ortogonal si y sólo si es de alguna de las siguientes formas:

$$R(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \qquad P(\theta) = \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix}$$

**Solución 3.** Demostremos primero:

$$AA^t = I \implies \langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \langle Ax, Ay\rangle &= (Ax)^t Ay \\ &= x^t \underbrace{A^t A}_{=I} y \\ &= x^t y \\ &= \langle x, y\rangle \end{aligned}$$

Veamos ahora que:

$$\langle Ax, Ay\rangle = \langle x, y\rangle \implies \|Av\| = \|v\|$$

En efecto:

$$\begin{aligned} \|Av\|^2 &= \langle Av, Av\rangle \\ &= \langle v, v\rangle \\ &= \|v\|^2 \end{aligned}$$

Por último demostraremos que:

$$\|Av\| = \|v\| \implies \text{Las columnas de } A \text{ son ortonormales}$$

En efecto:

$$\begin{aligned} 2\langle Pe_i, Pe_j\rangle &= \langle Pe_i + Pe_j, Pe_i + Pe_j\rangle - \langle Pe_i, Pe_i\rangle - \langle Pe_j, Pe_j\rangle \\ &= \|Pe_i + Pe_j\|^2 - \|Pe_i\|^2 - \|Pe_j\|^2 \\ &= \|P(e_i + e_j)\|^2 - \|Pe_i\|^2 - \|Pe_j\|^2 \\ &= \|e_i + e_j\|^2 - \|e_i\|^2 - \|e_j\|^2 \\ &= \langle e_i + e_j, e_i + e_j\rangle - \langle e_i, e_i\rangle - \langle e_j, e_j\rangle \\ &= 2\langle e_i, e_j\rangle \\ &= \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j \\ 2 & \text{si } i = j \end{cases} \end{aligned}$$

De donde concluimos que las columnas de $A$ son ortonormales y por tanto $A$ es una matriz ortogonal. Veamos ahora que pasa si $n = 2$, probaremos primero que:

$$A = R(\theta) \vee A = P(\theta) \implies AA^t$$

Si $A = R(\theta)$:

$$\begin{aligned} AA^t &= R(\theta)R(\theta)^t \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & -\sin(\theta) \\ \sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ -\sin(\theta) & \cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Si $A = P(\theta)$:

$$\begin{aligned} AA^t &= P(\theta)P(\theta)^t \\ &= \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cos(\theta) & \sin(\theta) \\ \sin(\theta) & -\cos(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \cos^2(\theta) + \sin^2(\theta) & \cos(\theta)\sin(\theta) - \sin(\theta)\cos(\theta) \\ \sin(\theta)\cos(\theta) - \cos(\theta)\sin(\theta) & \sin^2(\theta) + \cos^2(\theta) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Por último veamos que si una matriz tiene columnas ortonormales, entonces es de alguna de las formas anteriores. En efecto si una matriz tiene columnas con norma 1, entonces es de la forma:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\beta) \\ \sin(\alpha) & \sin(\beta) \end{pmatrix}$$

Puesto que ambas columnas deben estar en el circulo unitario. Además como los vectores son ortogonales tenemos que $\beta = \alpha \pm \frac{\pi}{2}$. Luego:

$$A = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \cos(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) \\ \sin(\alpha) & \sin(\alpha \pm \frac{\pi}{2}) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos(\alpha) & \mp\sin(\alpha) \\ \sin(\alpha) & \pm\cos(\alpha) \end{pmatrix}$$

De donde concluimos que la matriz es de la forma $P(\alpha)$ o $R(\alpha)$.