

MA2001-3 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.**Auxiliares:** Esteban Quiroz - Eduardo Silva

Obed Ulloa - Donato Vásquez

Fecha: 13 de septiembre de 2016.

Auxiliar 2

Definición 1: Sea M un conjunto y $d : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dice que d es una **métrica** si satisface:

- $d(x, y) \geq 0, \quad \forall x, y \in M$
- $d(x, y) = d(y, x), \quad \forall x, y \in M$
- $d(x, y) = 0 \iff x = y, \quad \forall x, y \in M$
- $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$

Si d es una métrica, al par (M, d) se le llama **espacio métrico**.

Definición 2: Sea E un espacio vectorial y $\|\cdot\| : E \rightarrow \mathbb{R}$ una función. Se dirá que esta función es una **norma** si cumple las siguientes propiedades.

- $\|x\| = 0 \implies x = 0, \quad \forall x \in E$
- $\|\lambda x\| = |\lambda| \cdot \|x\|, \quad \forall x \in E, \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\| \quad \forall x, y \in E$ (Desigualdad Triangular)

En este caso, denotaremos la distancia entre dos elementos $x, y \in E$ como $d(x, y) = \|x - y\|$

Definición 3: Dos normas $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_2$ definidas en un mismo e.v. E se dirán **equivalentes** si existen constantes c_1 y c_2 tales que

$$\|\cdot\|_2 \leq c_1 \|\cdot\|_1, \quad \|\cdot\|_1 \leq c_2 \|\cdot\|_2$$

Definición 4: Cuando $E = \mathbb{R}^n$, denotaremos:

- $\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}}$ donde $p \geq 1$
- $\|x\|_\infty = \max_{1 \leq i \leq n} \{|x_i|\}$

P1. Sea (M, d) un espacio métrico, verifique que las siguientes también son métricas.

- $\alpha(x, y) = \sqrt{d(x, y)}$
- $\beta(x, y) = \frac{d(x, y)}{1 + d(x, y)}$
- $\gamma(x, y) = \min\{1, d(x, y)\}$

P2. El objetivo de este problema es ver la equivalencia de las normas $\|\cdot\|_p$ en $\mathbb{R}^n$, para esto, se le pide proceder de la siguiente manera:

a) Demuestre el siguiente resultado conocido como **Desigualdad de Hölder**. Sean $x, y \in \mathbb{R}^n$, $p, q \in [1, +\infty]$ tales que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$. Entonces,

$$\sum_{i=1}^n |x_i| |y_i| \leq \left(\sum_{i=1}^n |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}} \left(\sum_{i=1}^n |y_i|^q \right)^{\frac{1}{q}} = \|x\|_p \|y\|_q$$

Hint: Puede usar que para todo $a, b > 0$, se tiene que $ab \leq \frac{1}{p}a^p + \frac{1}{q}b^q$

b) Pruebe que para $\|\cdot\|_p$ es una norma.

Propuesto: Pruebe que $\|\cdot\|_\infty$ también es una norma.

c) Para $p \in [1, \infty)$ fijo, pruebe que las normas $\|\cdot\|_p$ y $\|\cdot\|_\infty$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

d) Concluya que para todo $p_1, p_2 \in [1, \infty)$, las normas $\|\cdot\|_{p_1}$ y $\|\cdot\|_{p_2}$ son equivalentes en $\mathbb{R}^n$.

e) Demuestre que para todo $x \in \mathbb{R}^n$ se tiene que $\lim_{p \rightarrow \infty} \|x\|_p = \|x\|_\infty$.

f) Considere ahora el e.v.n $\mathcal{C}([0, 1], \mathbb{R})$ de las funciones continuas definidas en $[0, 1]$ a valores en $\mathbb{R}$ y las siguientes normas:

$$\|f\|_1 = \int_0^1 |f(x)| dx \quad \|f\|_\infty = \sup_{x \in [0, 1]} \{|f(x)|\}$$

Muestre que en este caso $\|\cdot\|_1$ y $\|\cdot\|_\infty$ no son equivalentes.

P3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.

a) Muestre que si $c - a = t \cdot (b - a)$, con $t \geq 1$, entonces $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$. (La igualdad significa que b pertenece a la recta entre a y c)

b) Muestre que la recíproca no es necesariamente cierta. Esto es, muestre un e.v.n $(F, \|\cdot\|_F)$ y puntos $a, b, c \in F$ tales que $d(a, c) = d(a, b) + d(b, c)$ pero no se tiene que $c - a = t \cdot (b - a)$.

c) Muestre que si en E la norma proviene de un producto interno, esto es, $\|x\| = \sqrt{\langle x, x \rangle}$, entonces la recíproca sí es cierta.

Hint : Puede usar que $|\langle x, y \rangle| = \|x\| \|y\|$ si y solo si $x = \lambda y$ con $\lambda \in \mathbb{R}$.

Recordatorio: Un producto interno en E es una función $\langle \cdot, \cdot \rangle : E \times E \rightarrow \mathbb{R}$ que satisface las siguientes propiedades:

- $\langle x + z, y \rangle = \langle x, y \rangle + \langle z, y \rangle, \quad \forall x, y, z \in E$
- $\langle \lambda x, y \rangle = \lambda \langle x, y \rangle, \quad \forall x, y \in E \quad \forall \lambda \in \mathbb{R}$
- $\langle x, y \rangle = \langle y, x \rangle, \quad \forall x, y \in E$
- $\langle x, x \rangle = 0 \iff x = 0, \quad \forall x \in E$
- $\langle x, x \rangle \geq 0, \quad \forall x \in E$