

MA2001-3 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.**Auxiliares:** Esteban Quiroz - Eduardo Silva

Obed Ulloa - Donato Vásquez

Fecha: 6 de octubre de 2016.

Pauta Auxiliar 5

Recuerdo:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, o bien, (E, d) un espacio métrico.

- **Definición 1:** Sea $A \subseteq E$, se dice que A es **abierto** si $(\forall x \in A)(\exists B(x, \varepsilon) \subseteq A)$
- **Definición 2:** Sea $B \subseteq E$, se dice que B es **cerrado** si B^c es un conjunto abierto.
- **Propiedad 1:** $B \subseteq E$ es cerrado ssi toda sucesión convergente de B tiene su límite en B .
- **Definición 3:** Sea $D \subseteq E$. Se definen el interior de D y la adherencia de D respectivamente como:
 - $\overset{\circ}{D} = \{x \in D \mid (\exists \varepsilon > 0) B(x, \varepsilon) \subseteq D\}$
 - $\bar{D} = \{x \in E \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset\}$

▪ **Teorema 1:** Son ciertas las siguientes propiedades:

- E y $\emptyset$ son abiertos.
- Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ también es abierto.
- Sea $\{B_j\}_{j \in J}$ una familia finita de abiertos (es decir, $|J| < \infty$). Entonces $\bigcap_{j \in J} B_j$ también es abierto.
- **Propiedad 2:** $K \subseteq E$ es compacto ssi toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente a un elemento de K .

P1. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$ un conjunto cualquiera. Demuestre las siguientes propiedades:

- a) $\forall B \subseteq E, A \cap B = \emptyset \implies \bar{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$
- b) $\overline{(\overset{\circ}{A}^c)} = (\bar{A})^c$ y $(\bar{A})^c = \text{int}(\overset{\circ}{A}^c)$
- c) $\forall B \subseteq E, A \cup B = E \implies \bar{A} \cup \overset{\circ}{B} = E$
- d) $\bar{A}$ es cerrado y $\overset{\circ}{A}$ es abierto.
- e) Si B es un abierto tal que $B \subseteq A$, entonces $B \subseteq \overset{\circ}{A}$. Concluya a partir de esto que $\overset{\circ}{A}$ es la unión de todos los abiertos contenidos en A .
- f) Si B es un cerrado tal que $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq B$. Concluya a partir de esto que $\bar{A}$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a A .
- g) $\forall B \subseteq A, \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{A}$ y $\bar{B} \subseteq \bar{A}$
- h) $\bar{A} = \{x \in E \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A : x_n \rightarrow x\}$, es decir, la adherencia de A es el conjunto de los límites de sucesiones de A .
- i) $\forall B \subseteq E$, se tiene que $\text{int}(A \cap B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- j) $\forall B \subseteq E$, se tiene que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \text{int}(A \cup B)$ y que $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

Solución:

- a) Veremos la contrarrecíproca, esto es, $\bar{A} \cap \overset{\circ}{B} \neq \emptyset \implies A \cap B \neq \emptyset$.

En efecto, sea $x \in \bar{A} \cap \overset{\circ}{B}$ (puedo hacer esto ya que no es vacío). Se tiene:

$$\begin{aligned}
 x \in \bar{A} \cap \overset{\circ}{B} &\iff x \in \bar{A} \wedge x \in \overset{\circ}{B} \\
 &\iff [\forall \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset] \wedge [\exists \bar{\varepsilon} : B(x, \bar{\varepsilon}) \subseteq B] \\
 &\implies [B(x, \bar{\varepsilon}) \cap A \neq \emptyset] \wedge [B(x, \bar{\varepsilon}) \subseteq B] \\
 &\implies \exists y \in B(x, \bar{\varepsilon}) \cap A : y \in B \\
 &\implies y \in A \wedge y \in B \\
 &\implies A \cap B \neq \emptyset
 \end{aligned}$$

b) Notemos que si tenemos la primera igualdad, basta reemplazar A por A^c y tendremos la segunda. Veamos la primera igualdad:

$$\begin{aligned}
 x \in \bar{A}^c &\iff (\forall \varepsilon > 0) B(x, \varepsilon) \cap A^c \neq \emptyset \\
 &\iff (\forall \varepsilon > 0) \exists y_\varepsilon \in B(x, \varepsilon) \cap A^c \\
 &\iff (\forall \varepsilon > 0) B(x, \varepsilon) \not\subseteq A \\
 &\iff x \in \left(\overset{\circ}{A}\right)^c
 \end{aligned}$$

c) Basta usar la propiedad **a)** con A^c y B^c .

$$A \cup B = E \implies B^c \cap A^c = \emptyset \implies \bar{B}^c \cap \overset{\circ}{A}^c = \emptyset \iff \left(\overset{\circ}{B}\right)^c \cap \left(\bar{A}\right)^c = \emptyset \implies \bar{A} \cup \overset{\circ}{B} = E$$

donde para el si y sólo si se usó la propiedad **b)**

d) de la propiedad **b)** podemos notar que $\bar{A} = \text{int}(A^c)^c$, luego, sólo basta verificar que el interior de un conjunto es siempre abierto. Si $\overset{\circ}{v} = \emptyset$, se concluye porque el vacío es abierto. Si $\overset{\circ}{A}$ no es vacío: Sea $x \in \overset{\circ}{A}$, debemos demostrar que existe un ε tal que $B(x, \varepsilon) \subseteq \overset{\circ}{A}$. Supongamos que no, esto es, $\forall \varepsilon > 0, \exists y \in B(x, \varepsilon) : y \notin \overset{\circ}{A}$, pero como $x \in \overset{\circ}{A}$, se tiene que hay un $\bar{\varepsilon}$ tal que $B(x, \bar{\varepsilon}) \subseteq A$. Fijemos ese epsilon y llamemos $\delta = d(x, y) < \bar{\varepsilon}$. Veamos que $B(y, \bar{\varepsilon} - \delta) \subseteq A$, contradiciendo que $y \notin \overset{\circ}{A}$. En efecto, sea $z \in B(y, \bar{\varepsilon} - \delta)$, luego,

$$d(x, z) \leq d(x, y) + d(y, z) \leq \delta + \bar{\varepsilon} - \delta = \bar{\varepsilon} \implies z \in B(x, \bar{\varepsilon}) \implies z \in A$$

Se concluye $\overset{\circ}{A}$ es abierto.

e) Si B es abierto, entonces

$$x \in B \implies \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq B \implies \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A \implies x \in \overset{\circ}{B}$$

Luego, como todos los abiertos contenidos en A además están contenidos en $\overset{\circ}{A}$, se tiene que la unión está contenida en $\overset{\circ}{A}$.

Además, como $\overset{\circ}{A}$ es un abierto contenido en A , se tiene que $\overset{\circ}{A}$ está en la unión de dichos abiertos.

f) Si B es cerrado y $A \subseteq B$, entonces $B^c \subseteq A^c$ es abierto, luego, $B^c \subseteq \text{int}(A^c) = \left(\bar{A}\right)^c$, esto implica que $\bar{A} \subseteq B$.

Luego, como todos los cerrados que contienen a A también contienen a $\bar{A}$, se concluye que $\bar{A}$ está en la intersección de todos esos cerrados.

Como en particular $\bar{A}$ es un cerrado que contiene a A , se concluye la otra inclusión.

g) Tenemos $\overset{\circ}{B} \subseteq B \subseteq A$, luego, $\overset{\circ}{B}$ es un abierto contenido en A , se concluye que $\overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{A}$. Tenemos que $B \subseteq A \subseteq \bar{A}$, luego, $\bar{A}$ es un cerrado que contiene a B , se concluye que $\bar{A} \subseteq \bar{B}$.

h) Sabemos que $\bar{A}$ es cerrado, entonces contiene a todos los límites de sucesiones en $\bar{A}$, como $A \subseteq \bar{A}$, se

concluye que contiene a todos los límites de sucesiones de A .

Veamos la otra inclusión, sea $x \in \bar{A}$, luego, $\forall \varepsilon > 0$, $B(x, \varepsilon) \cap A \neq \emptyset$. Sea $(\varepsilon_n)_{n \in \mathbb{N}} = \frac{1}{n}$ una sucesión. Como $\varepsilon_n > 0$, tenemos que $B(x, \varepsilon_n) \cap A \neq \emptyset$. Luego, $\forall n \in \mathbb{N}$, elijamos $x_n \in B(x, \varepsilon_n) \cap A$ cualquiera.

Claramente, $x_n \in A \quad \forall n \in \mathbb{N}$, luego, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en A . Además, claramente $x_n \rightarrow x$ (pues $d(x, x_n) \leq \varepsilon_n$, $\forall n \in \mathbb{N}$). Como encontramos una sucesión en A que converge a x , se concluye la igualdad de los conjuntos.

i) Notemos que $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ es un abierto (por ser intersección de abiertos) contenido en $A \cap B$, luego, $\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \subseteq \text{int}(A \cap B)$. Veamos la otra inclusión: si $\text{int}(A \cap B)$ es vacío, se concluye trivialmente (el vacío es subconjunto de cualquier conjunto), supongamos $\text{int}(A \cap B) \neq \emptyset$. Luego,

$$\begin{aligned} x \in \text{int}(A \cap B) &\implies \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A \cap B \\ &\implies \exists \varepsilon > 0 : B(x, \varepsilon) \subseteq A \wedge B(x, \varepsilon) \subseteq B \\ &\implies x \in \overset{\circ}{A} \wedge x \in \overset{\circ}{B} \\ &\implies x \in \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B} \end{aligned}$$

Concluimos entonces $\text{int}(A \cap B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$. Para el caso de la adherencia, nuevamente nos aprovecharemos de los complementos.

$$\overline{A \cap B} = \text{int}(A^c \cap B^c)^c = (\overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B})^c = (\overset{\circ}{A})^c \cup (\overset{\circ}{B})^c = \bar{A} \cup \bar{B}$$

j) Tenemos $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B}$ es un abierto (unión de abiertos) contenido en $A \cup B$, luego, se concluye $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \text{int}(A \cup B)$. Tenemos $\bar{A} \cap \bar{B}$ es un cerrado (unión de dos cerrados) que contiene a $A \cap B$, luego, $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$.

P2. Sea (E, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ dos conjuntos no vacíos cualesquiera. Se define el conjunto *suma* de estos conjuntos denotado $A + B$ como

$$A + B = \{\vec{a} + \vec{b} : \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\}$$

(a) Pruebe que si A es un conjunto cerrado y B es compacto, entonces $A + B$ es también un conjunto cerrado.

(b) Para convencerse de que en la parte anterior se requiere la compacidad de uno de los conjuntos, considere en $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ los conjuntos

$$A = \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad , \quad B = \{-n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Demuestre que ambos son cerrados, pero $A + B$ no lo es.

Solución:

a) Sea $\{z_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en $A + B$ tal que $z_n \rightarrow z$, debemos demostrar que $z \in A + B$. Como $z_n \in A + B$, se tiene que $\forall n \in \mathbb{N}$ $z_n = x_n + y_n$ donde $\{x_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A$ y $\{y_n\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$, como B es compacto, existe una subsucesión $\{y_{\phi(n)}\}_{n \in \mathbb{N}} \subseteq B$ convergente a $y \in B$. Luego, definimos $x_{\phi(n)} = z_{\phi(n)} - y_{\phi(n)}$ que converge a $z - y = x \in A$ (ya que $z_{\phi(n)}$ e $y_{\phi(n)}$ convergen). Finalmente, $z = x + y \in A + B$.

b) Es fácil ver que $\bar{A} = \mathbb{N} \setminus \{0\} = A$, luego, A es cerrado.

Podemos escribir el complemento de B como $B^c = \bigcup_{n=1}^{\infty} (-(n+1) + \frac{1}{n+1}, -n + \frac{1}{n})$ donde cada uno de los intervalos de la unión es abierto, luego B^c es abierto por ser unión cualquiera de abiertos, con lo que B es cerrado.

Para ver que $A + B$ no es cerrado consideremos las sucesiones $a_n = n \in A$ y $b_n = -n + \frac{1}{n} \in B$, claramente $a_n + b_n = \frac{1}{n} \rightarrow 0$, luego, si $0 \notin A + B$ podemos concluir. Supongamos $0 \in A + B$, es decir, $\exists m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ tal que $0 = m + (-n + \frac{1}{n}) \implies n - m = \frac{1}{n}$, como $m, n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$ la única posibilidad es que $n = 1$ (para que la fracción sea un entero), pero eso implica $m = 0$ y $m \in \mathbb{N} \setminus \{0\}$, es decir, una contradicción, concluimos entonces $0 \notin A + B$ y por tanto, $A + B$ no es cerrado.

P3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.

- a) Demuestre que si $K \subseteq E$ es compacto y $C \subseteq K$ es cerrado, entonces C es compacto.
- b) Demuestre que si $K \subseteq E$ es compacto, entonces K es cerrado y acotado.
- c) Demuestre que si $K \subseteq E$ es compacto y $C \subseteq E$ es cerrado, entonces $C \cap K$ es compacto.
- d) Considere ahora $E = \mathbb{R}^n$. Demuestre que si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado, entonces K es compacto.
- e) Concluya que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.

Solución:

a) Queremos ver que cualquier sucesión en C tiene una subsucesión convergente a un punto de C . Sea $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ una sucesión en C . Como $C \subseteq K$, se tiene que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a x en K . Pero la subsucesión también está en C y como C es cerrado, los límites de sus sucesiones están en C , es decir, $x \in C$. Luego, $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a un punto $x \in C$.

b) Veamos que es cerrado, sea $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ una sucesión convergente en K , debemos ver que el límite de esa sucesión está en K . En efecto, como K es compacto, $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a $x \in K$, pero como la sucesión converge y el límite es único, se tiene que la sucesión converge a $x \in K$ y se concluye.

Veamos que es acotado. Supongamos que no lo fuera, es decir, $K \not\subseteq B(0, k) \quad \forall k \in \mathbb{N}$. Es decir,

$$K \cap B(0, k)^c \neq \emptyset, \quad \forall k \in \mathbb{N}$$

Luego, para todo $k \in \mathbb{N}$, elegimos $x_k \in K \cap B(0, k)^c$. Es claro $\|x_k\| \geq k$ para todo $k \in \mathbb{N}$. Veamos que x_k no tiene una subsucesión convergente (lo que contradecirá que estamos en un compacto). En efecto, si suponemos que $x \in E$ es el límite de tal sucesión, sea $k_x > \|x\|$ y $\varepsilon = \frac{k_x - \|x\|}{2}$. Es fácil notar que $d(x_k, x) > \varepsilon$ para todo $k \geq k_0$, es decir, no puede existir una subsucesión convergente a x . Concluimos entonces que K es un conjunto acotado.

c) Como K y C son cerrados, $K \cap C$ también lo es. Luego, $K \cap C$ es un cerrado contenido en el compacto K . Concluimos que $C \cap K$ es compacto.

d) Sea K cerrado y acotado, queremos ver que si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión en K , entonces tiene una subsucesión convergente a un punto de K . Para eso, consideremos en $\mathbb{R}^n$ la norma $\|\cdot\|_\infty$ (¿Por qué puedo elegir usar esa?). Como K es acotado, consideremos $a_0 \in \mathbb{R}^n$ y $R > 0$ tal que $K \subseteq B(a_0, R)$. Dividamos $B(a_0, R)$ en 2^n bolas de radio $\frac{R}{2}$ (Para notar que es posible hacer esto, caracterizar las bolas de $\|\cdot\|_\infty$, sirve dibujarlas en $\mathbb{R}^2$). Como la sucesión tiene infinitos términos, hay al menos una de estas bolas que sigue teniendo infinitos términos de la sucesión, diremos que esa es la bola $B(a_1, \frac{R}{2})$. Volvemos a dividir esta bola y quedarnos con un punto a_2 y una bola de radio $\frac{R}{2^2}$ que tiene infinitos puntos de la sucesión. Iterando este argumento, para cada $k \in \mathbb{N}$, tenemos una bola $B(a_k, \frac{R}{2^k})$ con infinitos términos de la sucesión. Definimos $\phi(1)$ tal que $x_{\phi(1)} \in B(a_1, \frac{R}{2})$ y así mismo, para $k \in \mathbb{N}$, elegimos $\phi(k)$ tal que $x_{\phi(k)} \in B(a_k, \frac{R}{2^k})$ y además $\phi(\cdot)$ lo tomamos estrictamente creciente (podemos hacer esto pues tenemos infinitos puntos para elegir).

Veamos ahora que $(x_{\phi(k)})_{k \in \mathbb{N}}$ es una sucesión de Cauchy. En efecto, dado $\varepsilon > 0$, podemos encontrar $k_0 \in \mathbb{N}$

tal que $\varepsilon \geq \frac{r}{2^{k_0-1}}$. Notemos ahora que la bola $B(a_{k_0}, \frac{r}{2^{k_0}})$ tiene a todos los elementos de la sucesión $x_{phi(k)}$ con $k \geq k_0$ y además, la mayor distancia entre dos puntos de la bola es a lo más $\frac{r}{2^{k_0-1}}$. Luego,

$$\forall i, j \geq k_0, d(x_{\phi(i)}, x_{\phi(j)}) \leq \frac{r}{2^{k_0-1}} \leq \varepsilon$$

Como $\mathbb{R}^n$ es Banach, tenemos $x_{\phi(n)}$ converge a $x \in \mathbb{R}^n$, pero como K es cerrado y x es límite de una sucesión de K , se tiene $x \in K$. Concluimos que la sucesión $(x_k)_{k \in \mathbb{N}}$ tiene una subsucesión convergente a un punto en K . Es decir, K es compacto.

e) Si $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ es una sucesión acotada, existe $R > 0$ tal que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq \overline{B(0, R)}$. Luego, como $\overline{B(0, R)}$ es cerrado y acotado en $\mathbb{R}^n$, se concluye que la sucesión tiene una subsucesión convergente en $\overline{B(0, R)} \subseteq \mathbb{R}^n$ y se concluye.