

MA2001-3 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.**Auxiliares:** Esteban Quiroz - Eduardo Silva

Obed Ulloa - Donato Vásquez

Fecha: 6 de octubre de 2016.

Auxiliar 5

Recuerdo:

Sea $(E, \|\cdot\|)$ un espacio vectorial normado, o bien, (E, d) un espacio métrico.

- **Definición 1:** Sea $A \subseteq E$, se dice que A es **abierto** si $(\forall x \in A)(\exists B(x, \varepsilon) \subseteq A)$
- **Definición 2:** Sea $B \subseteq E$, se dice que B es **cerrado** si B^c es un conjunto abierto.
- **Propiedad 1:** $B \subseteq E$ es cerrado ssi toda sucesión convergente de B tiene su límite en B .
- **Definición 3:** Sea $D \subseteq E$. Se definen el interior de D y la adherencia de D respectivamente como:

- $\overset{\circ}{D} = \{x \in D \mid (\exists \varepsilon > 0) B(x, \varepsilon) \subseteq D\}$
- $\bar{D} = \{x \in E \mid (\forall \varepsilon > 0) B(x, \varepsilon) \cap D \neq \emptyset\}$

▪ **Teorema 1:** Son ciertas las siguientes propiedades:

- E y $\emptyset$ son abiertos.
- Sea $\{A_i\}_{i \in I}$ una familia de abiertos. Entonces $\bigcup_{i \in I} A_i$ también es abierto.
- Sea $\{B_j\}_{j \in J}$ una familia finita de abiertos (es decir, $|J| < \infty$). Entonces $\bigcap_{j \in J} B_j$ también es abierto.
- **Propiedad 2:** $K \subseteq E$ es compacto ssi toda sucesión en K tiene una subsucesión convergente a un elemento de K .

P1. Sea (E, d) un espacio métrico y $A \subseteq E$ un conjunto cualquiera. Demuestre las siguientes propiedades:

- a) $\forall B \subseteq E, A \cap B = \emptyset \implies \bar{A} \cap \overset{\circ}{B} = \emptyset$
- b) $\overline{(A^c)} = (\overset{\circ}{A})^c$ y $(\bar{A})^c = \text{int}(A^c)$
- c) $\forall B \subseteq E, A \cup B = E \implies \bar{A} \cup \overset{\circ}{B} = E$
- d) $\bar{A}$ es cerrado y $\overset{\circ}{A}$ es abierto.
- e) Si B es un abierto tal que $B \subseteq A$, entonces $B \subseteq \overset{\circ}{A}$. Concluya a partir de esto que $\overset{\circ}{A}$ es la unión de todos los abiertos contenidos en A .
- f) Si B es un cerrado tal que $A \subseteq B$, entonces $\bar{A} \subseteq B$. Concluya a partir de esto que $\bar{A}$ es la intersección de todos los cerrados que contienen a A .
- g) $\forall B \subseteq A, \overset{\circ}{B} \subseteq \overset{\circ}{A}$ y $\bar{B} \subseteq \bar{A}$
- h) $\bar{A} = \{x \in E \mid \exists (x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subseteq A : x_n \rightarrow x\}$, es decir, la adherencia de A es el conjunto de los límites de sucesiones de A .
- i) $\forall B \subseteq E$, se tiene que $\text{int}(A \cap B) = \overset{\circ}{A} \cap \overset{\circ}{B}$ y $\overline{A \cup B} = \bar{A} \cup \bar{B}$
- j) $\forall B \subseteq E$, se tiene que $\overset{\circ}{A} \cup \overset{\circ}{B} \subseteq \text{int}(A \cup B)$ y que $\bar{A} \cap \bar{B} \subseteq \overline{A \cap B}$

P2. Sea (E, d) un espacio métrico y $A, B \subseteq E$ dos conjuntos no vacíos cualesquiera. Se define el conjunto *suma* de estos conjuntos denotado $A + B$ como

$$A + B = \{\vec{a} + \vec{b} : \vec{a} \in A, \vec{b} \in B\}$$

(a) Pruebe que si A es un conjunto cerrado y B es compacto, entonces $A + B$ es también un conjunto cerrado.

(b) Para convencerse de que en la parte anterior se requiere la compacidad de uno de los conjuntos, considere en $(\mathbb{R}, \|\cdot\|)$ los conjuntos

$$A = \mathbb{N} \setminus \{0\} \quad , \quad B = \{-n + \frac{1}{n} : n \in \mathbb{N} \setminus \{0\}\}$$

Demuestre que ambos son cerrados, pero $A + B$ no lo es.

P3. Sea $(E, \|\cdot\|)$ un e.v.n.

- a) Demuestre que si $K \subseteq E$ es compacto y $C \subseteq K$ es cerrado, entonces C es compacto.
- b) Demuestre que si $K \subseteq E$ es compacto, entonces K es cerrado y acotado.
- c) Demuestre que si $K \subseteq E$ es compacto y $C \subseteq E$ es cerrado, entonces $C \cap K$ es compacto.
- d) Considere ahora $E = \mathbb{R}^n$. Demuestre que si $K \subseteq \mathbb{R}^n$ es un conjunto cerrado y acotado, entonces K es compacto.
- e) Concluya que toda sucesión acotada en $\mathbb{R}^n$ tiene una subsucesión convergente.