MA2001-3 Cálculo en Varias Variables
Profesor: Marcelo Leseigneur P.
Auxiliares: Esteban Quiroz - Eduardo Silva
Obed Ulloa - Donato Vásquez
Fecha: 25 de octubre de 2016.

Auxiliar 8

Recuerdo:

Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados.

- **Definición 1:** Una función $f : D \subseteq X \to Y$ se dice **continua en $\mathbf{x_0}$** $\in D$ si $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0$ tal que $\forall x \in D : \|x - x_0\|_X \leq \delta \implies \|f(x) - f(x_0)\|_Y \leq \varepsilon$
- **Definición 2:** Una función $f : D \subseteq X \to Y$ se dice **continua** si es continua en todo $x \in D$.
- **Definición 3:** Una función $f : D \subseteq X \to Y$ se dice **uniformemente continua** si $\forall \varepsilon > 0$, $\exists \delta > 0$ tal que $\forall x_1, x_2 \in D : \|x_1 - x_2\|_X \leq \delta \implies \|f(x_1) - f(x_2)\| \leq \varepsilon$
- **Definición 4:** Una función $f : D \subseteq X \to Y$ se dice **Lipschitz de constante K** si $\forall x_1, x_2 \in D : \|f(x_1) - f(x_2)\|_X \leq K\|x_1 - x_2\|_Y$
- **Propiedad 1:** Si f es Lipschitz, entonces f es uniformemente continua.
- **Definición 5:** Sea $f : D \subseteq X \to X$. Diremos que x_0 es **punto fijo** de f si $f(x_0) = x_0$
- **Definición 6:** Una función se dice **contractante** si es Lipschitz de constante $K \in (0, 1)$
- **Teorema 1 (Punto fijo de Banach):** Si X un espacio de Banach y $f : X \to X$ una función contractante, entonces f tiene un único punto fijo.

P1. **[Propiedades de las funciones continuas]**
Sean $(X, \|\cdot\|_X)$ e $(Y, \|\cdot\|_Y)$ dos espacios vectoriales normados y $f : D \subseteq X \to Y$. Demuestre las siguientes propiedades:

a) Si para todo conjunto abierto $V \subseteq Y$ existe un abierto $U \subseteq X$ tal que $f^{-1}(V) = U \cap D$, entonces f es continua.

b) Si $K \subseteq D$ es compacto y f es continua, entonces $f(K)$ es un conjunto compacto. Use lo anterior para concluir que si $Y = \mathbb{R}$, entonces f alcanza su mínimo y su máximo.

c) Si D es un conjunto compacto y f es continua, entonces f es uniformemente continua.

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la función definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{50x^2y^2}{x^2+y^2} ln(\frac{1}{x^2+y^2}) - 1 & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ -1 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Demuestre que f es una función continua.

b) Muestre que el conjunto $A = \{(x, y) \in R^2 : 50x^2y^2 ln(x^2 + y^2) > x^2 + y^2\}$ es un conjunto abierto en $\mathbb{R}^2$

c) Se define $K = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : f(x, y) \geq 0\}$. Muestre que K es no vacío y cerrado. Pruebe además que f alcanza su máximo en R^2

P3. El objetivo de este problema es demostrar que la **Ecuación Integral de Fredholm**

$$x(s) - \int_a^b k(s,t)x(t)dt = y(s) \qquad \text{para } s \in [a,b]$$

posee una solución $x(\cdot) \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, bajo las siguientes hipótesis:

- Las funciones $y : [a,b] \to \mathbb{R}$ y $k : [a,b] \times [a,b] \to \mathbb{R}$ son continuas con la norma $\|\cdot\|_\infty$
- Se cumple la siguiente desigualdad

$$\lambda := \max_{a \le s \le b} \int_a^b |k(s,t)|dt < 1$$

Además puede usar como conocido que $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ es un espacio de Banach.
Para demostrar esta propiedad, se le sugiere proceder de la siguiente manera:

a) Sea $A : (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty) \to (\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ la aplicación definida por:

$$(Ax)(s) := \int_a^b k(s,t)x(t)dt + y(s)$$

Note que la ecuación integral de Fredholm equivale a que $Ax = x$, por lo tanto se busca un punto fijo para A.

i) Pruebe la existencia de tal punto fijo.

ii) Sea $x_0 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$, demuestre que la sucesión $A^n x_0$ converge al punto fijo de A en $(\mathcal{C}([a,b],\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$

b) Es claro que la solución encontrada anteriormente depende de la función y. Sean $y_1, y_2 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ y $x_1, x_2 \in \mathcal{C}([a,b],\mathbb{R})$ las dos soluciones asociadas. Muestre que

$$\|x_1 - x_2\|_\infty = \|Ax_1 - Ax_2\|_\infty \le \|y_1 - y_2\|_\infty + \lambda \|x_1 - x_2\|_\infty$$

Deduzca de lo anterior que

$$\|x_1 - x_2\|_\infty \le \frac{1}{1-\lambda}\|y_1 - y_2\|_\infty$$

Y que por lo tanto la solución x del problema depende continuamente de la función y, es decir, la asignación $y \to x(y)$ que recibe la función y y entrega la solución asociada a ella, es continua.