

MA2001-3 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.**Auxiliares:** Esteban Quiroz - Eduardo Silva

Obed Ulloa - Donato Vásquez

Fecha: 22 de noviembre de 2016.**Auxiliar 11****P1.** Considere la función $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} x^2 \arctan\left(\frac{y}{x}\right) - y^2 \arctan\left(\frac{x}{y}\right) & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

a) Calcule $f(x, 0)$ y $f(0, y)$ para $x \neq 0, y \neq 0$.**b)** Para $(x, y) \neq (0, 0)$ determine $\nabla(x, y)$ y $H_f(x, y)$. ¿Es $H_f(x, y)$ una matriz simétrica?**c)** ¿Se cumple que $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(0, 0)$? Justifique.**d)** Encuentre el polinomio de Taylor de orden 2 en torno a $(0, 0)$.**P2.** Sea $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua. Considere en lo que sigue la ecuación:

$$g(t) \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0 \quad , \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

El objetivo de este problema es encontrar una solución particular para esta ecuación, definida en todo $\mathbb{R}^2$. Para ello siga los pasos detallados a continuación:

a) Considere f una solución de la ecuación anterior, y defina a partir de ella la función $h : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ dada por:

$$h(u, v) = f(x(u, v), t(u, v))$$

con $x(u, v) = u + G(v)$, $t(u, v) = v$ y $G : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ una función continua.Elijiendo G de forma adecuada, muestre que la función h verifica la ecuación

$$\frac{\partial h}{\partial v}(u, v) = 0 \quad , \quad \forall (u, v) \in \mathbb{R}^2$$

b) Con la ecuación de h obtenida en la parte anterior, encuentre una expresión general para f .**c)** Describa las soluciones de la ecuación

$$t \cdot \frac{\partial f}{\partial x}(x, t) + (t^2 + 1) \cdot \frac{\partial f}{\partial t}(x, t) = 0 \quad , \quad \forall (x, t) \in \mathbb{R}^2$$

y encuentre una solución particular para la condición inicial $\frac{\partial f}{\partial x}(x, 0) = e^x$

P3. [P1 Control 2 2012-1] Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. Considere la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0$$

a) Sea $\phi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ definida por $\phi(x, y) = (u, v) = (x + y, 2x + y)$ un cambio de variables. Muestre que la función $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $g(u, v) = f \circ \phi^{-1}(u, v)$ está bien definida.

b) Usando que $f(x, y) = g \circ \phi(x, y)$, calcule $\frac{\partial f}{\partial x}$ y $\frac{\partial f}{\partial y}$.

c) Calcule $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}$, $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ y $\frac{\partial^2 f}{\partial y^2}$

d) Muestre que $\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - 3 \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y} + 2 \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = \frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v}$

e) Sabiendo que el conjunto de funciones $g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ que cumplen $\frac{\partial^2 g}{\partial u \partial v} = 0$ es

$$\{g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R} : g(u, v) = \Psi_1(u) + \Psi_2(v) \text{ con } \Psi_1, \Psi_2 \text{ funciones clase } \mathcal{C}^2\}$$

Encuentre una expresión general para la solución de la EDP en términos de Ψ_1 y Ψ_2 .

f) Encuentre una solución que no sea la función nula ni un polinomio.