

MA2001-3 Cálculo en Varias Variables**Profesor:** Marcelo Leseigneur P.**Auxiliares:** Esteban Quiroz - Eduardo Silva

Obed Ulloa - Donato Vásquez

Fecha: 13 de diciembre de 2016.**Auxiliar 14****Recuerdo:**

Sean $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$ una función acotada sobre el rectángulo R , $P \in \mathcal{P}_R$ y $R_{j_1 \dots j_n}$ un subrectángulo resultante de esta partición.

- **Notación:**

- $\lambda(R_{j_1 \dots j_n}) = \prod_{i=1}^n (x_j^{(i)} - x_{j-1}^{(i)})$
- $m_{j_1 \dots j_n}(f) = \inf \left\{ f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in R_{j_1 \dots j_n} \right\}$
- $M_{j_1 \dots j_n}(f) = \sup \left\{ f(x_1, \dots, x_n) \mid (x_1, \dots, x_n) \in R_{j_1 \dots j_n} \right\}$

- **Definición 1:** Se definen las **sumas inferiores** de f con respecto a R en P como:

$$s(f, P) = \sum_{j_1 \dots j_n} m_{j_1 \dots j_n}(f) \cdot \lambda(R_{j_1 \dots j_n})$$

- **Definición 2:** Se definen las **sumas superiores** de f con respecto a R en P como:

$$S(f, P) = \sum_{j_1 \dots j_n} M_{j_1 \dots j_n}(f) \cdot \lambda(R_{j_1 \dots j_n})$$

- **Definición 3:** f se dirá **Riemann Integrable** si se cumple que:

$$\sup_{P \in \mathcal{P}_R} s(f, P) = \inf_{P \in \mathcal{P}_R} S(f, P)$$

- **Teorema 1:** (Fubini) Sea $R = [a, b] \times [c, d]$ un rectángulo y $f : R \rightarrow \mathbb{R}$ una función integrable. Se tiene que si alguna de las integrales:

- $\int_a^b \left(\int_c^d |f(x, y)| dy \right) dx$
- $\int_c^d \left(\int_a^b |f(x, y)| dx \right) dy$

es finita, entonces la integral de f sobre el rectángulo corresponde a

$$\int_a^b \left(\int_c^d f(x, y) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x, y) dx \right) dy$$

P1. Calcule el valor de las siguientes integrales

a) $\int_0^1 \int_0^1 xy e^{x+y} dy dx$

b) $\int_0^1 \int_0^2 \left(\frac{8y}{x+1} - \frac{4x^3}{y^2+1} \right) dx dy$

c) $\int_0^1 \int_0^2 \sqrt{|x^2 - y|} dy dx$

P2. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} \frac{x^2 - y^2}{(x^2 + y^2)^2} & \text{si } (x, y) \neq (0, 0) \\ 0 & \text{si } (x, y) = (0, 0) \end{cases}$$

Compruebe que

$$\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dy \right) dx \neq \int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$$

¿Contradice lo anterior el Teorema de Fubini? Justifique su respuesta.

Indicación: Puede serle útil notar que:

$$\frac{d}{du} \left(\frac{u}{u^2 + v^2} \right) = \frac{v^2 - u^2}{(u^2 + v^2)^2}$$

P3. Sea $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de clase $\mathcal{C}^2$. El objetivo de este problema es demostrar el teorema de Schwartz,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

usando para ello el Teorema de Fubini. Para ello siga los pasos detallados a continuación:

a) Defina la función:

$$g(x, y) = \frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(x, y) - \frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}(x, y)$$

Justifique la existencia de la integral de g sobre un rectángulo $\mathcal{R} = [a, b] \times [c, d] \subseteq \mathbb{R}^2$ arbitrario y calcúlela.

b) Demuestre que una función continua es nula si y sólo si su integral sobre cualquier rectángulo es nula.

c) Concluya el resultado pedido.

P4. Sea $f : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x, y) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in \mathbb{Q} \\ 2y & \text{si } x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

a) Demuestre que existe el $\int_0^t f(x, y) dy$ para todo $t \in [0, 1]$ y que se cumple

$$\int_0^1 \left(\int_0^t f(x, y) dy \right) dx = t^2, \quad \text{y} \quad \int_0^1 \left(\int_0^t f(x, y) dy \right) dx = t$$

Deduzca además que existe $\int_0^1 \left(\int_0^t f(x, y) dy \right) dx$

b) Demuestre que existe $\int_0^1 \left(\int_0^1 f(x, y) dx \right) dy$

c) Demuestre que la función f no es integrable en el cuadrado $[0, 1] \times [0, 1]$.

P5.

a) Se define $R = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x \geq 1, y \geq 1, x^2 + y^2 \leq 4\}$. Calcule la integral doble

$$\iint_R (x^2 + y^2) dx dy$$

b) Se define $D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1, \sqrt{x} \leq y \leq 1\}$. Calcule el valor de

$$I_2 = \iint_D e^{y^3} dy dx$$

c) Un sólido está limitado por la superficie $z = x^2 - y^2$, el plano xy y los planos $x = 1$ y $x = 3$. Calcule su volumen por doble integración.