

**MA2002-1: Cálculo Avanzado y Aplicaciones**

**Profesor:** Gino Montecinos G.

**Auxiliares:** Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.



## Auxiliar 2

20 de Septiembre de 2016

**Definición 1** (Integral de Flujo). Sea  $S$  una superficie regular orientable,  $\hat{n} : S \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo de normales continuo sobre  $S$ , y  $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial continuo definido sobre un abierto  $\Omega$  que contiene a  $S$ . Definimos la integral de flujo del campo  $\vec{F}$  a través de la superficie  $S$  orientada según  $\hat{n}$  mediante

$$\iint_S \vec{F} \cdot d\vec{A} := \iint_S \vec{F} \cdot \hat{n} dA = \iint_D \vec{F}(\vec{\varphi}(u, v)) \cdot \left( \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial u} \times \frac{\partial \vec{\varphi}}{\partial v} \right) dudv,$$

donde  $\varphi : D \subseteq \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$  es una parametrización regular de  $S$  compatible con la orientación, esto es, tal que  $\hat{n} = \frac{\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v}{\|\vec{\varphi}_u \times \vec{\varphi}_v\|}$

**Teorema 1** (Teorema de Gauss (o de la divergencia)). Sea  $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$  un abierto acotado cuya frontera  $\partial\Omega$  es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea  $\vec{F} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  un campo vectorial de clase  $C^1$  sobre un abierto  $\bar{\Omega} \subseteq \mathcal{U}$ . Entonces:

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \text{div}(\vec{F}) dV.$$

**P1.** Calcule la integral de volumen  $\iiint_V (2zx^2 + 2zy^2) dx dy dz$  donde  $V$  es la intersección del volumen exterior al manto del cono  $z^2 = x^2 + y^2$  con el volumen interior al cilindro  $x^2 + y^2 = 1, z \geq 0$

**P2.** Considere el campo  $\vec{F}(x, y, z) = xz\hat{i} + \hat{k}$  y la superficie  $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - \rho^2, \rho = \sqrt{x^2 + y^2}, \theta = \arctan(\frac{y}{x}), 0 \leq \rho \leq 2, \theta \in [0, 2\pi]\}$ . Encuentre el flujo que pasa a través de  $S$ .

**P3.** Sea  $S$  la superficie de  $\mathbb{R}^3$  que se encuentra en la región  $-h \leq z \leq h$ , donde  $h > 0$  y definida implícitamente en coordenadas cilíndricas por  $\rho = 1 + z$  en  $0 \leq z \leq h$  y  $\rho = 1 - z$  en  $-h \leq z \leq 0$ .

- (a) Bosqueje y encuentre una parametrización para  $S$
- (b) Considere el campo vectorial  $\vec{F} = \frac{5}{\rho}\hat{\rho} + e^{-z^2}\hat{\theta} + 3z\hat{k}$  definido en coordenadas cilíndricas. Determine la región donde  $\vec{F}$  es diferenciable.
- (c) Calcule por definición el flujo de  $\vec{F}$  a través de la superficie  $S$
- (d) Calcule el flujo anterior haciendo uso del teorema de la divergencia para un volumen adecuado.

*Indicación:* Recuerde que la divergencia en coordenadas ortogonales se expresa como:

$$\text{div}(\vec{F}) = \frac{1}{h_u h_v h_w} \left( \frac{\partial}{\partial u} (F_u h_v h_w) + \frac{\partial}{\partial v} (h_u F_v h_w) + \frac{\partial}{\partial w} (h_u h_v F_w) \right).$$