MA2002-1 Cálculo Avanzado y Aplicaciones
Profesor: Gino Montecinos G.
Auxiliares: Vicente Ocqueteau C., Sebastián Urzúa B.

Auxiliar 5

11 de Octubre de 2016

P1. *a*) Sean $f, g : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ funciones de clase C^2. Pruebe que

$$\nabla \times (f \nabla g) = \nabla f \times \nabla g$$

b) Dadas $f(x, y, z) = x^2 + y^2$ y $g(x, y, z) = \frac{arctan(1+z^2)}{(1+x^2+y^2)}$, calcule la integral de superficie

$$\iint_\Sigma (\nabla f \times \nabla g) \cdot \hat{n} dS$$

donde Σ es la superficie $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, $z \geq 0$ y $\hat{n}$ es la normal que apunta hacia el origen.

P2. Considere el campo en coordenadas esféricas dado por

$$F(\vec{r}) = r^2 \hat{r} + r\theta sen^3(\varphi)\hat{\theta}$$

a) Calcule $div(F)$ en todo punto del dominio de diferenciabilidad de F.

b) Sea Ω la región de la esfera unitaria $x^2 + y^2 + z^2 \leq 1$ que intersecta al cono infinito $z \geq \sqrt{x^2 + y^2}$. Defina $\Omega_\varepsilon = \{(x, y, z) \in \Omega : x^2 + y^2 \geq \varepsilon\}$, con $\varepsilon > 0$ pequeño. Bosqueje la región Ω_ε y encuentre el valor de

$$I = \lim_{\varepsilon \to 0} \iint_{\partial\Omega_\varepsilon} F \cdot d\vec{A},$$

deduciendo con este valor, el flujo de F sobre $\partial\Omega$.

P3. Demuestre y aplique los siguientes resultados, conocidos como las *fórmulas de Green.*

a) *Primera fórmula de Green:* Sean f, g dos campos escalares de clase C^1 y C^2 respectivamente, en un abierto $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ con superficie cerrada, regular por trozos y orientable. Entonces,

$$\iiint_\Omega f \Delta g dV = \iint_{\partial\Omega} f \frac{\partial g}{\partial n} dA - \iiint_\Omega \nabla f \cdot \nabla g dV$$

donde $\frac{\partial g}{\partial n} := \nabla g \cdot \hat{n}$ denota la llamada *derivada normal de g.*

b) *Segunda fórmula de Green:* Bajo las mismas hipótesis anteriores, pero asumiendo que $f \in C^2$,

$$\iiint_\Omega (f \Delta g - g \Delta f) dV = \iint_{\partial\Omega} (f \frac{\partial g}{\partial n} - g \frac{\partial f}{\partial n}) dA$$

c) Sea Ω como antes y además conexo. Considere sobre él la ecuación en derivadas parciales,

$$(EDP) \begin{cases} -\Delta u + u^3 = 0 & x \in \Omega \\ u = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases}$$

Muestre que, si $h \in C^2(\Omega)$ es solución de la EDP anterior, entonces $h \equiv 0$ en todo Ω.