Clase Auxiliar #2: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
20 de septiembre de 2016

Resumen

Teorema 1 *(Gauss) Sea $\Omega \subseteq \mathbb{R}^3$ un abierto acotado cuya frontera $\partial\Omega$ es una superficie regular por pedazos, orientada según la normal exterior. Sea $\vec{F} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial clase C^1 sobre un abierto $\mathcal{U}$ que contiene a $\bar{\Omega} = \Omega \cup \partial\Omega$. Entonces*

$$\iint_{\partial\Omega} \vec{F} \cdot d\vec{A} = \iiint_{\Omega} \mathrm{div}(\vec{F}) dV$$

P1. Considere la superficie S que se obtiene al intersectar la superficie $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ con el volumen definido por $x^2 + y^2 - 2ay \leq 0$, donde $a > 0$.

a) Encuentre una parametrización para S.

b) Calcule el área de S.

P2. Considere la superficie $S \subset \mathbb{R}^3$ formada por los puntos del casquete esférico unitario que están por encima de los planos $z = 2y$ y $y = 0$. Es decir, $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 = 1, z \geq 2y, y \geq 0\}$.

(a) Bosqueje S y encuentre una parametrización regular de esta superficie.

(b) Calcule el flujo del campo

$$\vec{F}(r, \theta, \phi) = \frac{r \sin^2 \theta}{(\sin \phi) \cos^2 \varphi} \, \widehat{r} + re^r \, \widehat{\theta},$$

sobre la superficie S orientada con la normal exterior a la esfera.

P3. Calcular la integral de flujo $\displaystyle\iint_S \nabla\Phi \cdot d\vec{A}$, siendo S el hemisferio superior del elipsoide Ω: $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$, orientado según la normal exterior y Φ es el campo escalar

$$\Phi(x, y, z) = (x - 1)^2 + 2(y - 1)^2 + z^2.$$