Clase Auxiliar #4: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
4 de octubre de 2016

Resumen

Definición(Integral de trabajo o de línea). Sea Γ una curva simple y regular, y sea $\vec{F} : \Omega \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ un campo vectorial continuo. Definimos la integral de trabajo (o integral de línea) de $\vec{F}$ sobre la curva $\Gamma \subseteq \Omega$ por:

$$\int_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} := \int_a^b \vec{F}\left(\vec{r}(t)\right) \cdot \frac{d\vec{r}}{dt}(t)dt,$$

donde $\vec{r} : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ es una parametrización regular de $\vec{F}$.

Teorema 1 *(Stokes) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^3$ una superficie orientable y regular por pedazos, cuyo borde ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos. Sea un $\vec{F} : \mathcal{U} \subseteq \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ campo vectorial de clase C^1 definido sobre un abierto $\mathcal{U}$ que incluye la superficie S y su borde ∂S. Sea finalmente $\hat{n} : S \to \mathbb{R}^3$ un campo de vectores normales que define una orientación sobre S y supongamos que la curva cerrada ∂S es recorrida con orientación positiva con respecto a la elección de la normal $\hat{n}$, es decir, respetando la regla de la mano derecha. Entonces*

$$\oint_{\partial S} \vec{F} \cdot d\vec{r} = \iint_S rot(\vec{F}) \cdot \hat{n}\ dA$$

P1. Dado $h > 0$, sea Γ la curva que se encuentra sobre la superficie definida por

$$x^2 + y^2 = \frac{z^2}{h^2},$$

de forma que la altura $z = z(\theta)$ satisface la ecuación diferencial

$$\frac{dz}{d\theta} = z$$
$$z(0) = h,$$

donde z y θ representan las coordenadas cilíndricas.

a) Bosqueje la curva

b) Considere el campo vectorial

$$\vec{F}(x,y,z) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{-1}{z^2}\right).$$

Y sea Γ_0 la restricción de Γ a $\theta \in \left[\frac{\pi}{6}, \frac{\pi}{3}\right]$. Calcule el trabajo realizado por el campo $\vec{F}$ al desplazar una partícula a través de Γ_0.

P2. *a*) Bosqueje la superficie definida por $z^2 + x^2 = 4 + y^2$, $y \geq 0$. Note que para y fijo, la ecuación anterior representa una circunferencia.

b) Bosqueje la curva $\mathcal{C}$ obtenida al intersectar la superficie anterior con el cilindro de acuación $x^2 + y^2 = 4$.

c) Calcule la circulación $\oint_{\mathcal{C}} \vec{F} \cdot d\vec{r}$ para el campo (en coordenadas cilíndricas)

$$\vec{F}(\rho, \theta, z) = (\rho sin(\theta) + z)\hat{\rho} + \frac{z}{\rho} sin(\theta)\hat{\theta} + (z^3 - \rho cos(\theta))\hat{k}.$$

P3. Sea Γ la curva que se obtiene de intersectar la superficie $z = x^2 + y^2$ con la superficie de la esfera unitaria. Considere Γ recorrida en sentido antihorario.

a) Calcule la integral de trabajo del campo $\vec{F} = (x^2 + z)\hat{\imath} + (y^2 + x)\hat{\jmath} + (z^2 + y)\hat{k}$ a lo largo de Γ.

b) Sea $\vec{F} = \frac{1}{\rho}\hat{\theta} + z\hat{k}$ (en coordenadas cilíndricas). Pruebe que $rot\vec{F} = \vec{0}$ para $\rho > 0$, pero que sin embargo $\oint_\Gamma \vec{F} \cdot d\vec{r} \neq 0$. Explique esta aparente contradicción con el teorema de Stokes.