Clase Auxiliar #5: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
11 de octubre de 2016

Resumen

Teorema 1 *(Green) Sea $S \subseteq \mathbb{R}^2$ una región acotada tal que su frontera ∂S es una curva cerrada, simple y regular por pedazos, orientada en el sentido antihorario. Consideremos campos escalares $M = M(x, y)$ y $N = N(x, y)$, ambos de clase C^1 en un abierto que contiene a S y a ∂S. Entonces*

$$\oint_{\partial S} M\ dx + N\ dy = \iint_S \left(\frac{\partial N}{\partial x} + \frac{\partial M}{\partial y} \right) dxdy$$

P1. *a*) Verifique que

$$\vec{F}(x, y, z) = (y^2 cos(x) + z^3)\hat{\imath} + (2ysen(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

es un campo conservativo y encuentre un potencial escalar para él.

b) Calcule $\int_\Gamma \vec{G} \cdot d\vec{r}$ donde

$$\vec{G}(x, y, z) = (y^2 cos(x) + 2z^3)\hat{\imath} + (2ysen(x) - 4)\hat{\jmath} + (3xz^2 + 2z)\hat{k}$$

y Γ es la curva que consta del arco $y = x^2$ entre el orígen y el punto $(1, 1, 0)$ en el plano $z = 0$, junto con el segmento recto que va del punto $(1, 1, 0)$ al punto $(0, 0, 1)$.

P2. Considere la función en $\mathbb{R}^2$ dada por

$$\vec{F}(x, y) = x\hat{\jmath}.$$

Aplicando el teorema de Green a esta función calcule el área total encerrada por la curva de ecuación $x^{2/3} + y^{2/3} = 1$.
Indicación: Use la parametrización $x = cos^3\theta$, $y = sen^3\theta$ con $\theta \in [0, 2\pi]$. Además, puede usar las siguientes identidades:

$$\int_0^{2\pi} cos^m\theta sen^n\theta\ d\theta = \frac{n-1}{m+n} \int_0^{2\pi} cos^m\theta sen^{n-2}\theta\ d\theta, \qquad \int_0^{2\pi} cos^m\theta\ d\theta = \frac{m-1}{m} \int_0^{2\pi} cos^{m-2}\theta\ d\theta.$$

P3. *a*) Sea S la superficie de ecuación $x^2 + y^2 - (z - 6)^2 = 0$ para $3 \leq z \leq 6$. Bosqueje S, indique gráficamente una orientación sobre S y calcule el flujo neto a través de S del campo $\vec{F}(x, y, z) = x(3 - z)\hat{\imath} + y(3 - z)\hat{\jmath} + (3 - z)^2\hat{k}$.

b) Sea $\vec{F} = yx^2\hat{\imath} - xz\hat{\jmath} + 3y\hat{k}$. Considere la superficie S del paraboloide $2x = z^2 + y^2$ para $0 \leq x \leq 2$. Bosqueje S, indique gráficamente una orientación sobre S y evalúe la integral de flujo del rotor de $\vec{F}$ a través de S.