Clase Auxiliar #6: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
25 de octubre de 2016

Resumen

Definición 1 *Sea $f : \Omega \to \mathbb{C}$ una función. Diremos que f es derivable en z_0 si existe el límite*

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

Si f es derivable en todo $z \in \Omega$ diremos que f es holomorfa en Ω.

Teorema 1 *Una función f es derivable en $z_0 \in \Omega$ si es derivable como función de $\mathbb{R}^2$ en $\mathbb{R}^2$ y además se satisfacen las condiciones de Cauchy-Riemann (C-R):*

$$\frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) = \frac{\partial v}{\partial y}(x_0, y_0)$$
$$\frac{\partial u}{\partial y}(x_0, y_0) = -\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$$

En tal caso $f'(z_0) = \frac{\partial u}{\partial x}(x_0, y_0) + i\frac{\partial v}{\partial x}(x_0, y_0)$

Teorema 2 *Para la serie parcial $S_N(z) = \sum_{n=0}^{N} a_n(z-c)^n$, se define el radio de convergencia de la serie*

$$R = 1/\limsup_{k \to \infty} \sqrt[k]{|a_k|} \quad = 1/\limsup_{k \to \infty} \frac{|a_{k+1}|}{|a_k|}$$

Entonces S_N converge si $|z - c| < R$ y diverge si $|z - c| > R$

Problemas

P1. Sea $u(x, y) = sin(x)cosh(y)$. Encuentre $v(x, y)$ tal que $f(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ sea holomorfa en $\mathbb{C}$.

P2. Sea $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ una función holomorfa en todo $\mathbb{C}$ tal que

- $\forall z, w \in \mathbb{C},\ f(z + w) = f(z)f(w)$.
- $\forall x \in \mathbb{R},\ f(x) = e^x$

a) Demuestre que $f(z) = e^x f(iy)$.

b) Para todo $y \in \mathbb{R}$, denote $u_0(y) = u(0, y)$ y $v_0(y) = v(0, y)$. Pruebe que u_0 y v_0 satisfacen el sistema de EDO siguiente:

$$\begin{cases} \dfrac{du_0}{dy} = -v_0 \\ \dfrac{dv_0}{dy} = u_0 \end{cases}$$

c) Verifique que $u_0(0) = 1$ y que $v_0(0) = 0$, y resuelva el sistema de EDO de la pregunta anterior. Deduzca que $f(z) = e^z, \ \forall z \in \mathbb{C}$.

P3. Determine el dominio de convergencia de las siguientes series:

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} n!(z-i)^{n!}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n} z^n$.

c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} (n+2^n) z^n$.

d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^3}{(3n)!} z^n$.

Indicación: (d) Use la fórmula de Stirling: $n! \sim c n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n}$, para alguna constante $c \geq 0$.

P4. Determine la expresión en serie de potencias en torno al origen para las siguientes funciones:

a) $f(z) = e^{-z^2}$.

b) $f(z) = \dfrac{z^2}{(1+z)^2}$.

Calcule además el radio de convergencia en cada caso.