Clase Auxiliar #11: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
29 de noviembre de 2016

Resumen

Teorema 1 *(Teorema de los residuos) Sea f una función meromorfa en un abierto Ω y sea P el conjunto de todos sus polos. Sea Γ un camino simple y cerrado, recorrido en sentido antihorario, tal que $\Gamma \cap P = \varnothing$. Entonces Γ encierra un número finito de polos de f, digamos $P \cap D = \{p_1, ..., p_n\}$ y más aún*

$$\oint_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{j=1}^{n} Res(f, p_j)$$

Definición 1 *El residuo asociado a un polo p de orden m se calcula como:*

$$Res(f,p) = \lim_{z \to p} \frac{1}{(m-1)!} \frac{d^{m-1}}{dz^{m-1}} \left[(z-p)^m f(z)\right]$$

Teorema 2 *Def. Una serie de Laurent es una serie de la forma $\displaystyle\sum_{k=-\infty}^{+\infty} c_k (z-a)^k$. Sean*

$$R_1 = \limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_{-k}|}, \quad R_2 = 1/\limsup_{k\to\infty} \sqrt[k]{|c_k|}.$$

Si $R_1 < R_2$ entonces la serie converge para todo z en la región $A = \{z \in \mathbb{C} : R_1 < |z-a| < R_2\}$ y define una función holomorfa en A.

Problemas

P1. Pruebe que:

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\theta}{a + b\cos\theta} = \frac{2\pi}{\sqrt{a^2 - b^2}},$$

donde $a, b \in \mathbb{R}$ son tales que $a > |b|$.

P2. Encuentre el desarrollo en series de Laurent de las siguientes funciones en torno a 0, así como las regiones donde estas convergen.

$$\text{i) } f(z) = z^{-5} cos(z), \quad \text{ii) } f(z) = z e^{1/z^2}, \quad \text{iii) } \frac{1}{z^3 - z^4}.$$

P3. Para $a > 1$ y $n \in \mathbb{N}$, evalúe las siguientes integrales:

$$C_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\cos n\theta}{a - \cos\theta} d\theta, \qquad S_n(a) = \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sin n\theta}{a - \cos\theta} d\theta.$$