Clase Auxiliar #12: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
13 de diciembre de 2016

Definición 1 *Sea $f : [-l, l] \to \mathbb{R}$ una función continua. Diremos que f admite un desarrollo en serie de Fourier en $[-l, l]$ si existen escalares $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ y $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ tales que*

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[a_n cos(\frac{n\pi x}{l}) + b_n sen(\frac{n\pi x}{l}) \right], \quad \forall x \in [-l, l]$$

Coeficientes Si f tiene expansión en serie de Fourier, entonces

$$a_0 = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x)\, dx, \quad a_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) cos(\frac{n\pi x}{l})\, dx, \quad b_n = \frac{1}{l} \int_{-l}^{l} f(x) sen(\frac{n\pi x}{l})\, dx$$

Problemas

P1. Sea $f(x) = |x|$ definida en el intervalo $[-\pi, \pi]$ y extendida en forma 2π-periódica.

a) Encuentre la serie de Fourier asociada a f, comente su convergencia puntual.

b) A partir de lo anterior muestre que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{(2n-1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

P2. Encuentre la serie de Fourier <u>en senos</u> de la función f dada en $[0, \pi]$ por

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x \in [0, \pi/2] \\ 2 & \text{si } x \in [\pi/2, \pi] \end{cases}$$

Discuta además la convergencia puntual de dicha serie en relación al valor de $f(x)$ para cada $x \in [0, \pi]$.
Hint: Puede serle útil extender apropiadamente $f(x)$ para $x \in [-\pi, 0)$.

P3. Calcule las siguientes integrales

a) $I = \displaystyle\int_{-\infty}^{\infty} \frac{x^2}{(x^2+1)(x^2-4)} dx.$

b) $J = \displaystyle\int_{I} \frac{e^z}{(z+1)^4} dz,$

donde I es el eje imaginario. **Hint:** Se sugiere considerar un camino de $-iR$ a iR y luego una semicircunferencia de radio R grande.

P4. Calcule la integral real $\int_0^{\infty} \frac{1}{1+x^4} dx$.

a) Para $R > 0$, sea $D = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| \leq R,\ 0 \leq arg(z) \leq \pi/2\}$, y sea $\Gamma = \partial D$. Pruebe que

$$\int_{\Gamma} \frac{1}{1+z^4} dz = \frac{\sqrt(2)\pi(1-i)}{4}$$

Sugerencia: Le ayudará encontrar las raices de $z^4 + 1 = 0$.

b) Si $\Gamma_R = \{z \in \mathbb{C} \ : \ |z| = R,\ 0 \leq arg(z) \leq \pi/2\}$, pruebe que $\int_{\Gamma_R} \frac{1}{1+z^4} dz \to 0$, si $R \to \infty$.

c) Concluya.