Auxiliar Preparación Exámen: Cálculo Avanzado y Aplicaciones

Profesor: Emilio Vilches
Auxiliar: Felipe Salas
21 de diciembre de 2016

Definición 1 *Sea $f : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ una función integrable (ie. $\int_{-\infty}^{\infty} |f(y)|dy < \infty$).Se define la* **transformada de Fourier** *de la función f como la función $\hat{f} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$*

$$\hat{f}(s) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} f(x)e^{-ixs}\ dx$$

Sea $g : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ otra función integrable, se define la antitransformada de g como la función $\check{g} : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$

$$\check{g}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} g(s)e^{ixs}\ dx$$

Problemas

P1. Usando separación de variables resuelva la siguiente ecuación en derivadas parciales:

$$\begin{array}{rl} u_{tt} + u_x - c^2 u_{xx} = 0 & 0 < x < l, \quad t > 0 \\ u(x,0) = \phi(x);\ u_t(x,0) = \varphi(x) & 0 \le x \le l \\ u(0,t) = 0,\ u(l,t) = 0 & t > 0 \end{array} \tag{1}$$

donde ϕ y φ son funciones dadas.

P2. *a*) Muestre que la transformada de Fourier de $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$ es

$$\hat{f}(s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|},$$

y encuentre con ello la transformada de Fourier de $g(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$

b) Las vibraciones de una varilla semi-infinita se modelan por la ecuación

$$u_{tt} + a^2 u_{xxxx} = 0, \quad x > 0,\ t > 0.$$

Suponga que la varilla satisface una condición tipo Neumann en el orígen $u_x(t,0) = 0$ para todo $t > 0$; que $\int_0^{\infty} |u|dx < \infty$ y que inicialmente la varilla se encuentra en reposo $u_t(0,x) = 0$, en la posición $u(0,x) = \frac{1}{1+x^2}$ para $x > 0$.

1) Considere $v(t,\cdot)$ la extensión par de la función $u(t,\cdot)$. Verifique que esta extensión satisface la EDP para $x \in \mathbb{R}$, $t > 0$.
2) Deduzca que la transformada de Fourier de $v(t,\cdot)$ es $\hat{v}(t,s) = \sqrt{\frac{\pi}{2}} e^{-|s|} cos(as^2 t)$.
3) Concluya que la solución $u(t,x)$ se puede escribir en forma integral como

$$u(t,x) = \int_0^{\infty} e^{-s} cos(sx) cos(as^2 t) ds$$

P3. *a*) Sea Ω un volumen suave de frontera Σ. Pruebe las formulas de Green para $f,\ g\ \in C^1(\Omega)$:

1) $\int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g + \int_\Omega f \Delta g = \int_\Sigma f \nabla g \cdot \hat{n}$
2) $\int_\Omega f \Delta g - \int_\Omega g \Delta f = \int_\Sigma f \nabla g \cdot \hat{n} - \int_\Sigma g \nabla f \cdot \hat{n}$

b) Considere $C = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 \le 1;\ -1 \le z \le 1\}$, $\vec{F}(x,y,z) = (e^{y^2} sin(y) + xy^2,\ e^{x^2} cos(z) + x^2 y, x^2)$.
Calcule el flujo de $\vec{F}$ a través del manto de C (ie. a través de $S = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3\ :\ x^2 + y^2 = 1;\ |z| \le 1\}$