Auxiliar Uno - Grupos

9 de Septiembre de 2016

P1. Encuentre todos los grupos de orden menor o igual a 5 y verifique que son conmutativos.

P2. Para $n > 2$ se denota con D_{2n} al conjunto de simetrías del poligono regular de n lados. Muestre que D_{2n} tiene una estructura natural de grupo y describala:

a) ¿Cuál es la operación del grupo?

b) ¿Cuántos elementos tiene D_{2n}?

c) Pruebe que D_{2n} es generado por un elemento de orden 2 y otro de orden n.

d) ¿Es abeliano?

P3. Escribamos $[n] = \{1, 2, ..., n\}$, $S_n = \{f : [n] \to [n] \ : \ f \ es \ biyeccion\}$.

a) Pruebe que S_n junto a la composición de funciones es un grupo. S_n es el *grupo simétrico*.

b) ¿Es S_n abeliano?

c) Pruebe que todo grupo de orden n se embebe en S_n (esto es, existe un monomorfimo a S_n).

P4. Sea F un cuerpo. Al conjunto de matrices invertibles de nxn con coeficientes en F lo denotaremos por $GL_n(F)$ y lo llamaremos *grupo lineal general sobre F*.

a) Muestre que $GL_n(F)$ es grupo.

b) Describa a $GL_2(F_2)$, donde F_2 es *el* cuerpo de 2 elementos.

c) Sea $O_n(F) = \{M \in M_{nxn}(F) : \ M^t M = MM^t = I\}$. Muestre que $O_n(F) \leq GL_n(F)$ y describa a $O_2(R)$.

P5. Sean H$\leq$ G grupos. Pruebe que hay tantas traslaciones-derechas como traslaciones-izquierdas.

P6. **Lema de Goursat** Sean G_1, G_2 grupos y H un subgrupo de $G_1 \times G_2$ tal que las proyecciones $p_i : H \to G_i$ son epiyectivas. Escribamos $N_i = Ker(p_i)$. De su definición, $N_1 = \{(x, y) \in H : \ p_1(x, y) = 1\} = \{(1, y) \in H\}$, por lo que podemos identificar a N_1 como un subgrupo de G_2 via el morfismo p_2. Lo mismo vale para N_2.

a) Pruebe que N_1 es subgrupo normal de G_2

b) Muestre que la imagen de H en $G_1/N_2 \times G_2/N_1$ es el grafo de un isomorfismo entre G_1/N_2 y G_2/N_1.

P7. Sea m el exponente del grupo abeliano y finito G y n su orden. Pruebe que n divide a una potencia de m.