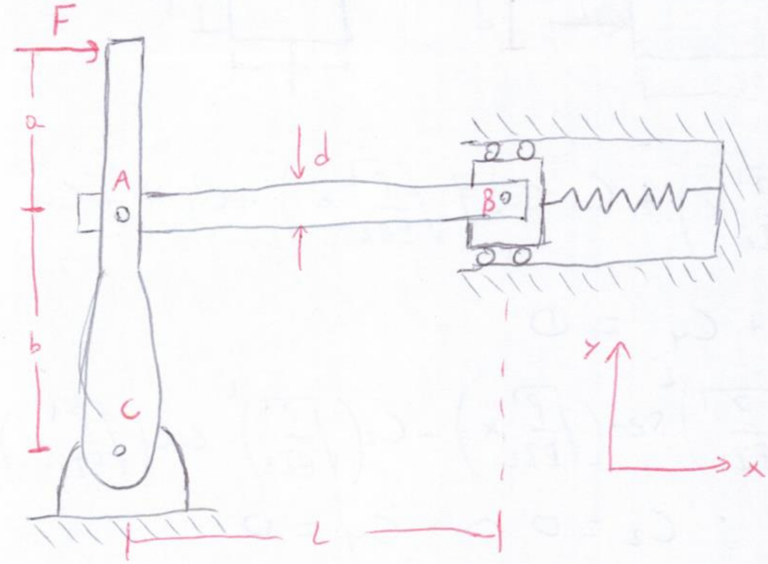
Pauta Aux. 7 ME3204

2014

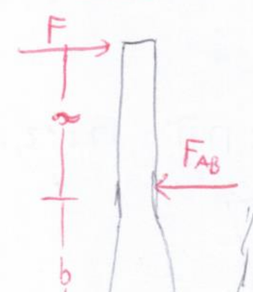
P1]



$\sigma_0 = 350\ MPa$
$E = 190\ GPa$
$L = 20\ cm$
$b = 8\ cm$
$a = 10\ cm$
$d = 8\ mm$
$F.S = 2$

- Existen 3 fuentes de falla:
  - Falla por plasticidad en compresión
  - Falla por pandeo en el plano x-y
  - Falla por pandeo en el plano x-z

DCL (Para encontrar fuerza de compresión en AB)



$$\sum_C M_z = 0 \Rightarrow b \cdot F_{AB} + (a+b)\cdot F = 0$$

$$\boxed{\therefore F_{AB} = \frac{(a+b)}{b} F}$$

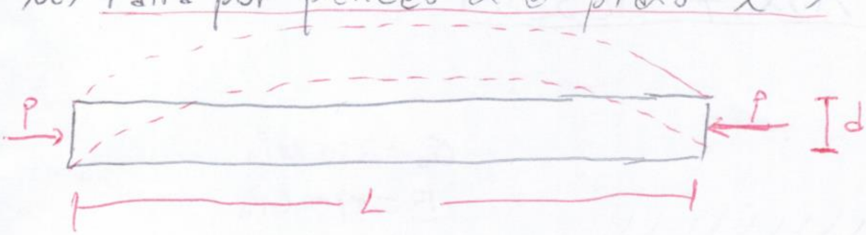
i) Falla por plasticidad: Encontremos σ_x

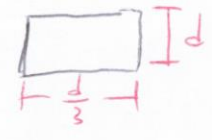
$\hookrightarrow \sigma_x = \frac{F_{AB}}{A}$, pero σ_x debe cumplir factor de seguridad

$$\Rightarrow \sigma_x = \frac{\sigma_0}{F.S} \Rightarrow \frac{(a+b)}{b}\cdot\frac{\cancel{4}F}{\cancel{\pi}\cdot\frac{d^2}{3}} = \frac{\sigma_0}{F.S}$$

$$\boxed{\therefore F = \frac{\sigma_0\, b \cdot d^2}{3\, F.S\,(a+b)} = 1659{,}26\ N}$$

ii) Falla por pandeo en el plano $x-y$





Sdn) $y(x) = C_1 \cdot \operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\,x\right) + C_2 \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\,x\right) + C_3 x + C_4$

C.b) $\bullet\ y(0) = 0 \rightsquigarrow C_2 + C_4 = 0$

$\bullet\ \frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0 \rightsquigarrow -C_1\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\right)^2 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\,x\right) - C_2\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\right)^2 \cdot \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\,x\right) = 0$

$\therefore C_2 = 0 \rightsquigarrow C_4 = 0$

$\bullet\ \frac{dy}{dx}(L) = 0 \rightsquigarrow -C_1 \frac{P}{EI_z} \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\,L\right) = 0 \ (*)$

$\bullet\ y(L) = 0 \rightsquigarrow C_1 \cdot \operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\,L\right) + C_3 L = 0$

$\hookrightarrow$ De $(*)$ $\Rightarrow C_3 = 0$

* Tomando $(*)$ $\rightsquigarrow \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\,L\right) = 0 \rightsquigarrow \sqrt{\frac{P}{EI_z}}\,L = n\pi, \quad n = 1, 2, \ldots$

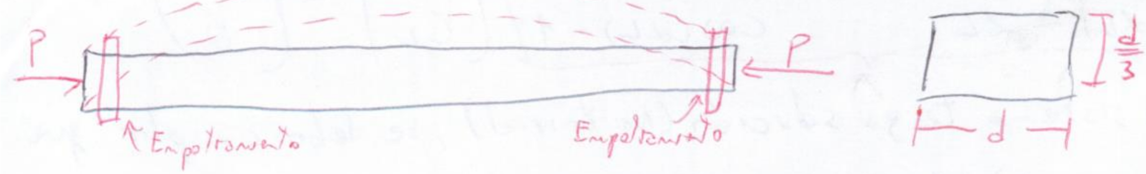
$$\boxed{\therefore P_{cr}^{(1)} = \left(\frac{n\pi}{L}\right)^2 E I_z = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 E I_z}$$

(Primera Carga crítica)

Condición de falla) $F_{AB} = \frac{P_{cr}^{(1)}}{F.S} \rightsquigarrow \frac{(a+b)}{b} F = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 E \cdot \underbrace{\left(\frac{d}{3} \cdot \frac{d^3}{12}\right)}_{I_z} \cdot \frac{1}{F.S}$

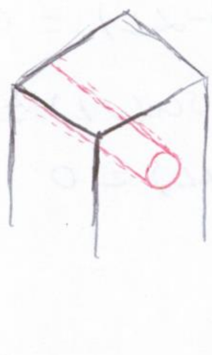
$$\boxed{\therefore F = \left(\frac{\pi}{L}\right)^2 \cdot \frac{b\, d^4 E}{36(a+b) \cdot F.S} = 1185,33\ N}$$

iii) Falla por pandeo en el plano x-z



Soln)

$$z(x) = C_1 \cdot \operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}}\,x\right) + C_2 \operatorname{Cos}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}}\,x\right) + C_3 x + C_4$$



El pasador permite el giro libre en una dirección (plano x-y), sin embargo, impide completamente el movimiento en la otra (plano x-z), por lo tanto, en ese plano se considera como un empotramiento (y se toman las cond. de borde correspondientes)

C.B)

- $z(0) = 0 \rightsquigarrow \boxed{C_2 + C_4 = 0}$ (1)

- $\frac{dz}{dx}(0) = 0 \rightsquigarrow \boxed{C_1\sqrt{\frac{P}{EI_y}} + C_3 = 0}$ (2)

- $\frac{dz}{dx}(L) = 0 \rightsquigarrow C_1\sqrt{\frac{P}{EI_y}}\,\operatorname{Cos}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}}\,L\right) - C_2 \operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}}\,L\right) + C_3 = 0$

  * Reemplazando C_3 desde (2): $\left(\alpha = \sqrt{\frac{P}{EI_y}}\right)$

$$\boxed{C_1\left(\alpha \operatorname{Cos}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}}\,L\right) - \alpha\right) - C_2 \operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_y}}\,L\right)\alpha = 0} \quad (3)$$

- $z(L) = 0 \rightsquigarrow C_1 \operatorname{Sen}(\alpha L) + C_2 \operatorname{Cos}(\alpha L) + C_3 L + C_4 = 0$

  * Reemplazando C_3 desde (2) y C_4 desde (1):

$$\boxed{C_1\left(\operatorname{Sen}(\alpha L) - \alpha L\right) + C_2\left(\operatorname{Cos}(\alpha L) - 1\right) = 0} \quad (4)$$

- Es posible expresar las ecs. (3) y (4) como un sistema matricial:

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \alpha\cos(\alpha L)-\alpha & -\alpha \operatorname{sen}(\alpha L) \\ \operatorname{sen}(\alpha L)-\alpha L & \cos(\alpha L)-1 \end{pmatrix}}_{A}\begin{pmatrix} C_1 \\ C_2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

- Para que este sistema tenga solución (No trivial), se debe cumplir que:

$$\det(A)=0$$

$$\Rightarrow (\alpha\cos(\alpha L)-\alpha)(\cos(\alpha L)-1)+\alpha\operatorname{sen}(\alpha L)(\operatorname{sen}(\alpha L)-\alpha L)=0$$

$$\alpha\cos^2(\alpha L)-\alpha\cos(\alpha L)-\alpha\cos(\alpha L)+\alpha+\alpha\operatorname{sen}^2(\alpha L)-\alpha L\operatorname{sen}(\alpha L)=0$$

$$\alpha\underbrace{(\operatorname{sen}^2(\alpha L)+\cos^2(\alpha L))}_{1}-2\alpha\cos(\alpha L)+\alpha-\alpha L\operatorname{sen}(\alpha L)=0$$

$$2\alpha-2\alpha\cos(\alpha L)-\alpha L\operatorname{sen}(\alpha L)=0$$

$$\boxed{\therefore 2-2\cos(\alpha L)-L\operatorname{sen}(\alpha L)=0}$$

- Ec. se cumple si $\alpha L = 2n\pi,\ n=1,2,3,\ldots$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI_y}}\,L = 2\pi\pi \rightsquigarrow \boxed{P_{cr}^{(1)} = 4\left(\frac{\pi}{L}\right)^2 EI_y}$$

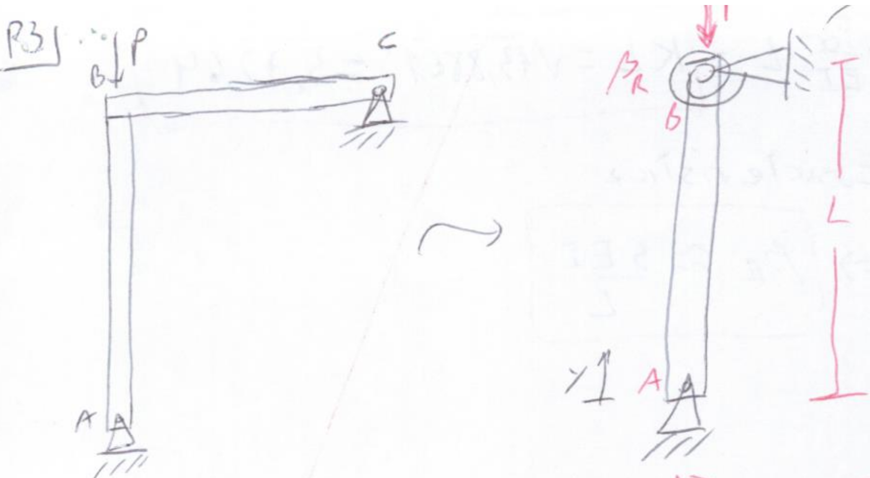
Condición de falla | $F_{AB}=\dfrac{P_{cr}^{(1)}}{F.S} \rightsquigarrow \dfrac{(a+b)}{b}F=\dfrac{4}{F.S}\left(\dfrac{\pi}{L}\right)^2 \cdot EI_y$

$$* \ I_y=\frac{d\cdot\left(\frac{d}{3}\right)^3}{12}=\frac{d^4}{324} \rightsquigarrow \therefore F=\left(\frac{\pi}{L}\right)^2\frac{4Eb\cdot d^4}{324(a+b)\cdot F.S}$$

$$\boxed{F=526{,}81\ N}$$

$$\boxed{\therefore F_{crítico}=526{,}81\ N \ \text{(Falla por pandeo en el plano } x\text{-}z \text{ primero)}}$$

P3)



$$M_R = -\beta_R \cdot \theta_B$$

$$\boxed{K = \sqrt{\frac{P}{EI}}}$$

a) $$\frac{d^4y}{dx^4} + \frac{P}{EI}\frac{d^2y}{dx^2} = 0 \Rightarrow \boxed{y(x) = A\,\mathrm{sen}(kx) + B\cos(kx) + Cx + D}$$

$$y'(x) = Ak\cos(kx) + Bk\,\mathrm{sen}(kx) + C$$

$$y''(x) = -Ak^2\,\mathrm{sen}(kx) - Bk^2\cos(kx)$$

*C.B.:

- $\frac{d^2y}{dx^2}(0) = 0 \rightsquigarrow \boxed{B = 0}$; $y(0) = 0 \rightsquigarrow \boxed{D = 0}$

- $y(L) = 0 \Rightarrow A\,\mathrm{sen}(kL) + CL = 0 \rightsquigarrow \boxed{C = -A\frac{\mathrm{sen}(kL)}{L}}$ (*)

- $EI \cdot \frac{d^2y}{dx^2}(L) = -\beta_R \cdot \frac{dy}{dx}(L)$

$$EI(-\cancel{A}k^2\,\mathrm{sen}(kL)) = -\beta_R(\cancel{A}k\cos(kL) + C) = -\beta_R\left(Ak\cos(kL) - \frac{A\,\mathrm{sen}(k\right.$$

$$k^2 EI\,\mathrm{sen}(kL) = k\beta_R\cos(kL) - \frac{\mathrm{sen}(kL)}{L}$$

$$k^2L^2 = \frac{kL^2\beta_R}{EI}\frac{\cos(kL)}{\mathrm{sen}(kL)} - \frac{L\beta_R}{EI}$$

$$\boxed{\therefore \frac{\beta_R L}{EI}(\cot(kL)\cdot kL - 1) = (kL)^2}$$

b) $P_{cr} = 13{,}886\frac{EI}{L^2} \Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI}}\cdot L = \boxed{K\cdot L = \sqrt{13{,}886} \approx 3{,}7264}$

*Reemplazando en la ec. característica:

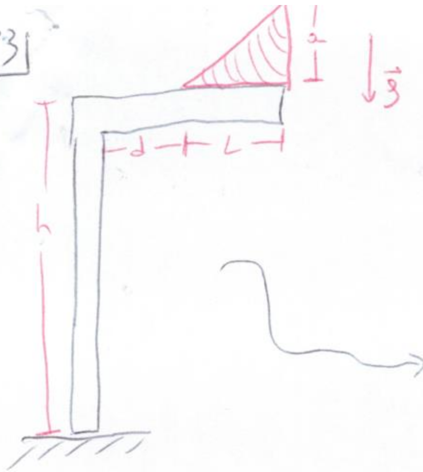
$$\beta_R = \frac{(kL)^2}{(kL\cdot\cot(kL) - 1)}\cdot\frac{EI}{L} \Rightarrow \boxed{\beta_R \approx \frac{3EI}{L}}$$

b) $P_{cr} = 13,8861 \dfrac{EI}{L^2} \sim \sqrt{\dfrac{P_{cr}}{EI}} \cdot L = \boxed{KL = \sqrt{13,8861} = 3,7264}$

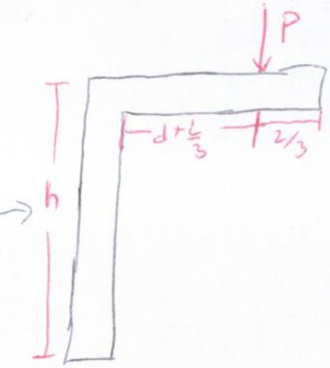
* Reemplazando en la ec. característica

$$\beta_R = \frac{(KL)^2 \cdot EI}{(KL\cot(KL) - 1) \cdot L} \Rightarrow \boxed{\beta_R \approx \frac{3\,EI}{L}}$$

P3)



* La veleta se comporta como una fza distribuida lineal, luego



$$P = \rho \cdot V \cdot g$$

$$\boxed{P = \frac{\rho\, a \cdot L \cdot e \cdot g}{2}} \quad (*)$$

* El problema se asemeja a la mitad de un problema de pandeo con excentricidad, luego:

Soln)

$$y(x) = C_1 \operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, x\right) + C_2 \operatorname{Cos}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, x\right) - e$$

C.B) (Sólo dos)

- $y(0) = 0 \rightsquigarrow C_2 = e$
- $y(2h) = 0 \rightsquigarrow C_1 \operatorname{sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, 2h\right) + e \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, L\right) - e = 0$

$$\boxed{\therefore\ C_1 = \frac{e\left(1 - \cos\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, L\right)\right)}{\operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, 2h\right)}}$$

* En C_1 se puede dar inestabilidad si $\operatorname{Sen}\left(\sqrt{\frac{P}{EI_z}}\, 2h\right) = 0$

$$\Rightarrow \sqrt{\frac{P}{EI_z}} \cdot 2h = n\pi \Rightarrow \boxed{P_{cr}^{(n)} = \frac{1}{4}\left(\frac{n\pi}{h}\right)^2 EI_z} \quad (n=1)$$

* $I_z = \frac{\pi}{64}\left(\varnothing_e^4 - \varnothing_i^4\right) = 3{,}68 \cdot 10^{-8}\ m^4$

* Reemplazando ec $(*)$, se tiene $\rightsquigarrow$ $\boxed{a = \frac{EI_z}{2\rho L e g}\left(\frac{\pi}{h}\right)^2 = 0{,}274\ m}$