Ejercicio N°4

Profesor: Francisco Brieva
Prof. Auxiliares: Esteban Aguilera, M. Ignacia Reveco, Manuel Morales.

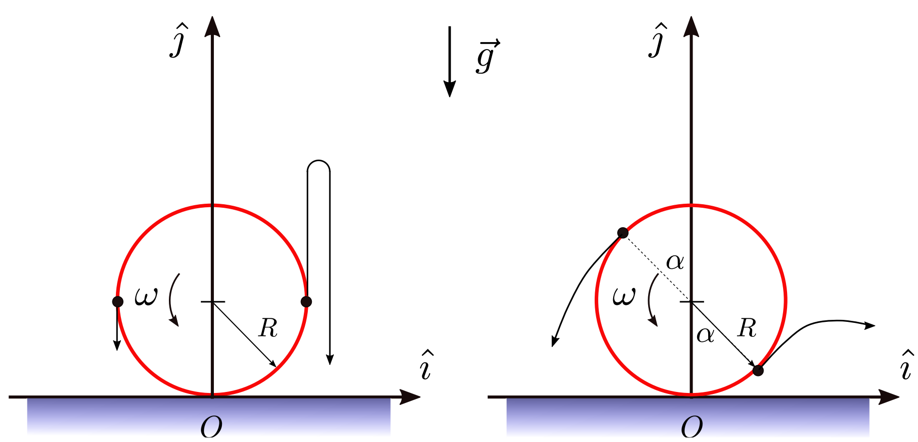
25 de abril de 2017

P1. Una rueda gira en torno a un eje horizontal a 30 rpm (1 $rpm =$ una revolución por minuto $=$ 1 vuelta por minuto), de manera que su parte inferior queda a nivel del suelo, pero sin rozarlo (la rueda gira sin rodar).

Sobre el borde de la rueda se han adosado 2 pequeñas piedras, en posiciones diametralmente opuestas.

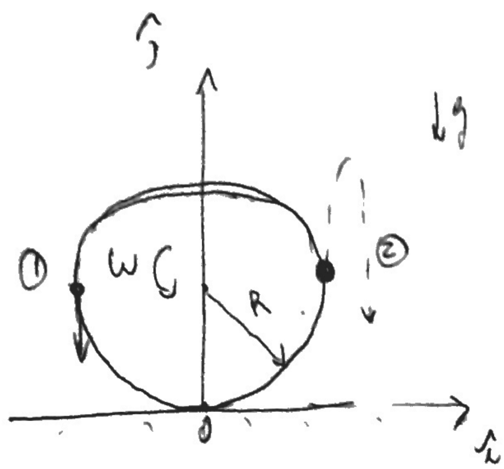
a) Suponga que cuando el diámetro que une a las piedras pasa por la posición horizontal, éstas se desprenden del borde en forma simultánea (Fig. A) y una de ellas llega al suelo antes que la otra. Se observa que durante el intervalo de tiempo entre la llegada al suelo de una y otra piedra, la rueda da una vuelta completa. Determine el radio de la rueda.

b) Qué ángulo α debe formar la línea que une a ambas piedras con la vertical (Fig. B)para que, si las piedras se desprenden de esa posición, lleguen al suelo al mismo tiempo?



Ejercicio #4 NACHA

(a)



- tiempo que demora la piedra 1 en llegar al suelo:

$$Y_1(t) = Y_0 + V_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Donde $\begin{cases} Y_0 = R & (\hat{j}) \\ V_0 = -\omega R & (\hat{j}) \end{cases}$

$\Rightarrow Y_1(t) = R - \omega R t - \frac{1}{2} g t^2$

; sea t_1 el tiempo que demora en llegar al suelo $\Leftrightarrow Y_1(t_1) \overset{!}{=} 0$

$\Leftrightarrow Y_1(t_1) = 0 = R - \omega R t_1 - \frac{1}{2} g t_1^2 \Leftrightarrow \frac{1}{2} g t_1^2 + \omega R t_1 - R = 0$

$$\Leftrightarrow t_1 = \frac{-\omega R \pm \sqrt{\omega^2 R^2 + 4 \frac{1}{2} g R}}{2 \cdot \frac{1}{2} g}$$

$$\Rightarrow t_1 = -\frac{\omega R}{g} + \sqrt{\frac{\omega^2 R^2 + 2gR}{g^2}}$$

- tiempo que demora la piedra 2 en llegar al suelo:

$$Y_2(t) = Y_0 + V_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2$$

Donde $\begin{cases} Y_0 = R & (\hat{j}) \\ V_0 = \omega R & (\hat{j}) \end{cases}$

$$\Rightarrow \quad Y_2(t) = R + \omega R t - \frac{1}{2} g t^2$$

Sea t_2 el tiempo que demora en llegar al suelo ... $Y_2(t_2) \stackrel{!}{=} 0$

$$\Rightarrow \quad Y_2(t_2) = 0 = R + \omega R t_2 - \frac{1}{2} g t_2^2 \iff \frac{1}{2} g t_2^2 - \omega R t_2 - R = 0$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{\omega R \pm \sqrt{\omega^2 R^2 + 4 \cdot \frac{1}{2} g R}}{2 \cdot \frac{1}{2} g}$$

$$\Rightarrow \quad t_2 = \frac{\omega R}{g} + \sqrt{\frac{\omega^2 R^2 + 2gR}{g^2}}$$

La rueda alcanza a dar una vuelta entera entre que llega la piedra 1 y la piedra 2. Sea t_3 el tiempo que le toma a la rueda dar una vuelta entera, entonces:

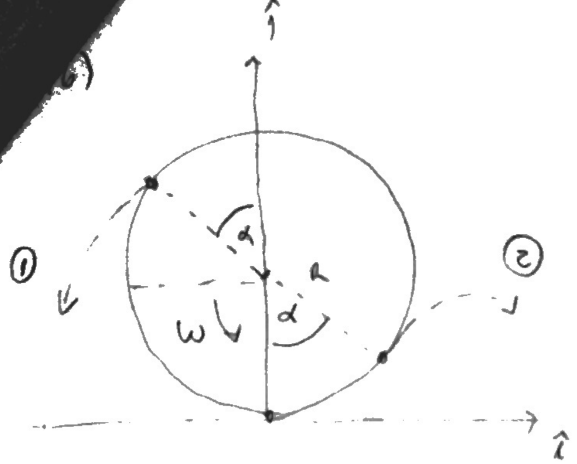
$$t_3 = \frac{2\pi}{\omega} \quad \wedge \quad t_3 = t_2 - t_1$$

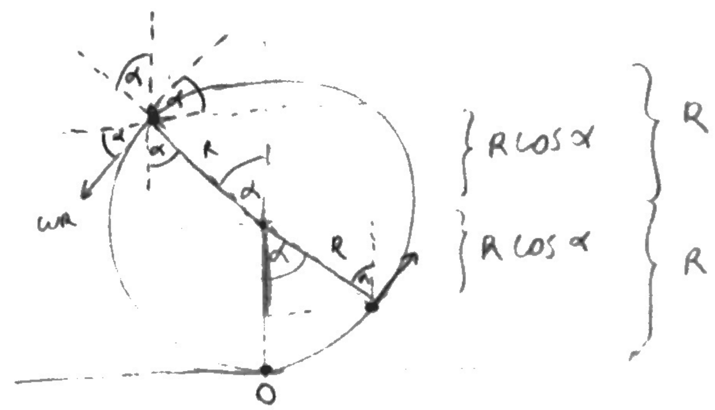
$$\iff \quad \frac{2\pi}{\omega} = \frac{\omega R}{g} + \sqrt{\frac{\omega^2 R^2 + 2gR}{g^2}} - \left(-\frac{\omega R}{g} + \sqrt{\frac{\omega^2 R + 2g}{4R}} \right)$$

$$\iff \quad \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\omega R}{g}$$

$$\iff \quad \boxed{R = \frac{\pi \cdot g}{\omega^2}} \qquad \text{A.D.} \rightarrow \left[\frac{m/s^2}{1/s^2} \right] = [m] \ \checkmark\checkmark$$

c)





ecuaciones de itinerario para ambas piedras (en el eje $\hat{j}$)

- piedra 1:

$$Y_1(t) = Y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \quad , \text{ Donde } \begin{cases} Y_0 = R + R\cos\alpha \\ \quad\;\; = R(1+\cos\alpha) \\ v_0 = -\omega R \sin\alpha \quad (\hat{j}) \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Y_1(t) = R(1+\cos\alpha) - \omega R \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}g t^2$$

- piedra 2:

$$Y_2(t) = Y_0 + v_0 t + \frac{1}{2}(-g)t^2 \quad . \text{ Donde } \begin{cases} Y_0 = R - R\cos\alpha \\ \quad\;\; = R(1-\cos\alpha) \\ v_0 = \omega R \sin\alpha \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Y_2(t) = R(1-\cos\alpha) + \omega R \sin\alpha \cdot t - \frac{1}{2}g t^2$$

• tiempos de llegada al suelo para ambas piedras, desde un ángulo α de desprendimiento; son iguales $\Rightarrow t_1 = t_2 = t^*$

Piedra 1: $Y_1(t^*) \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = R(1+\cos\alpha) - \omega R \sin\alpha \, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \qquad (1)$$

Piedra 2: $Y_2(t^*) \overset{!}{=} 0$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = R(1-\cos\alpha) + \omega R \sin\alpha \, t^* - \frac{1}{2} g t^{*2} \qquad (2)$$

sumando las ecuaciones (1) y (2):

$$\Rightarrow \quad 0 = R(1+\cos\alpha) + R(1-\cos\alpha) - 2\cdot\frac{1}{2} g t^{*2}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = 2R - g t^{*2}$$

$$\Leftrightarrow \quad t^* = \sqrt{\frac{2R}{g}}$$, reemplazando en (1) v (2)

$$\Rightarrow \quad 0 = R(1+\cos\alpha) - \omega R \sin\alpha \sqrt{\frac{2R}{g}} - \frac{1}{2} g \cdot \frac{2R}{g}$$

...

$$\Leftrightarrow \quad 0 = R + R\cos\alpha - \omega R \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}} - \cancel{R}$$

$$\Leftrightarrow \quad 0 = \cancel{R}\cos\alpha - \omega R \sin\alpha \sqrt{\frac{2R}{g}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \omega \sin\alpha \cdot \sqrt{\frac{2R}{g}} = \cos\alpha$$

$$\Leftrightarrow \quad \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha} = \sqrt{\frac{g}{2R}} \cdot \frac{1}{\omega} \qquad / \ \forall \alpha \text{ tq } \cos\alpha \neq 0$$

$$\Leftrightarrow \quad tg\,\alpha = \sqrt{\frac{g}{2R\omega^2}}$$

reemplazando con el radio encontrado en (a)

$$tg\,\alpha = \sqrt{\frac{\cancel{g}}{2\cancel{\omega^2}} \cdot \frac{\cancel{\omega^2}}{\pi \cancel{g}}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

$$\Rightarrow \quad tg\,\alpha = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}$$

$$\Leftrightarrow \quad \alpha = \operatorname{arctg}\left(\frac{1}{2\pi}\right)$$

//

(a) • identificar ecuaciones itinerario (+1)

• obtener tiempos (+1)

• encontrar t_3 e imponer $t_3 = t_2 - t_1$ (+1)
y despejar R

(b) • identificar ecuaciones itinerario (+1)

• encontrar t^* (+1)

• encontrar α (+1)