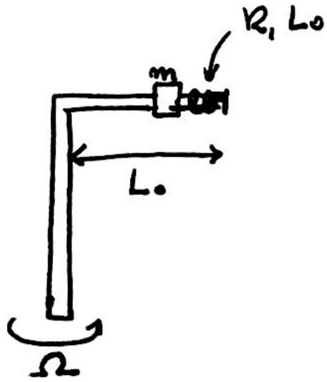
Pauta auxiliar 12

P3/ a)



a) Elegimos coordenadas polares, por lo que:

$$\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\hat{\rho} + (\rho\ddot{\phi} + 2\dot{\rho}\dot{\phi})\hat{\phi}$$

pero $\dot{\phi} = \Omega \longrightarrow \ddot{\phi} = 0$.

La única fuerza <u>real</u> involucrada es la fuerza elástica:

$$\vec{F_e} = -k\rho\hat{\rho}.$$

Por la ecuación de movimiento en $\hat{\rho}$ /

$$m(\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2) = -k\rho$$

Despejamos $m\ddot{\rho}$ (buscamos $U^*(\rho)$):

$$m\ddot{\rho} = -k\rho + m\rho\Omega^2 \qquad (\text{pues } \dot{\phi} = \Omega).$$

$$m\ddot{\rho} = \rho(-k + m\Omega^2)$$

pero $-\frac{\partial}{\partial\rho}U^*(\rho) = m\ddot{\rho}$

$$\longrightarrow \quad -\frac{\partial U(\rho)}{\partial\rho} = -k\rho + \rho m\Omega^2$$

$$-dU = (-k\rho + \rho m\Omega^2)\,d\rho \qquad \int_0^U \quad \int_0^\rho$$

$$-U = -\frac{k\rho^2}{2} + \frac{m\Omega^2\rho^2}{2}$$

$$U = \frac{\rho^2}{2}(k - m\Omega^2)$$

Asignamos arbitrariamente potencial nulo a $\rho = 0$.

b) Si $m\Omega^2 >> k$:

$$U = \frac{\rho^2}{2} m\Omega^2 \left[\cancel{\frac{k}{m\Omega^2}}^{\,0} - 1 \right] = -\frac{\rho^2}{2} m\Omega^2$$

$\therefore \quad U' = -\rho m\Omega^2$

En el equilibrio : $U' = 0$

$\longrightarrow -\rho m\Omega^2 = 0 \longrightarrow \rho = 0.$

$U'' = -m\Omega^2 < 0 \longrightarrow \rho = 0$ es <u>inestable</u>.

c) Si $m\Omega^2 << k$

$$U = \frac{\rho^2}{2} k \left[1 - \cancel{\frac{m\Omega^2}{k}}^{\,0} \right] = \frac{\rho^2 k}{2}$$

$U' = \rho k$

En el equilibrio : $U' = 0$

$\longrightarrow \rho k = 0 \longrightarrow \rho = 0.$

$U'' = k > 0 \longrightarrow \rho = 0$ es <u>estable</u>.

La energía es $E = K(\dot{\rho}) + K(\rho)$

$= \frac{1}{2} \boxed{m} \dot{\rho}^2 + \rho k$

Lo que va entre $\frac{1}{2}$ y $\dot{\rho}^2$ es α. $\to \alpha = m$

Finalmente $\omega_0 = \sqrt{\frac{U''}{\alpha}} = \sqrt{\frac{k}{m}}$

d) Si $m\Omega^2 = k$, $U = 0 \quad \forall \rho \in [0, L_0]$

$\longrightarrow U' = U'' = 0.$

$\therefore$ Todo el trayecto es de equilibrio.

Una perturbación produce mov. recto uniforme, pues $\vec{F} = -U' = 0$!