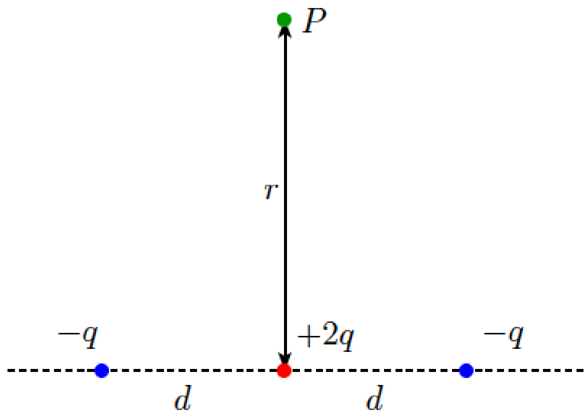
Ejercicio en clases:

Profesor: Matías Montesinos
Auxiliares: Fabián Álvarez - Diland Castro

[Campo eléctrico por definición (caso discreto)]

Considere la siguiente distribución espacial de cargas puntuales.



Se pide:

A. Calcular el campo eléctrico en el punto P

Solución

El campo en el punto P es posible obtenerlo mediante el Principio de Superposición. Se tendrá como origen el punto punto P. Con esto $\overrightarrow{r} = 0$ (ya! estamos en el lugar donde queremos calcular el campo)

A continuación, escribimos los vectores que identifican las posiciones de las diferentes cargas que producen el campo que se siente en P.

$$\overrightarrow{r}'_{(+2q)} = -r\hat{\jmath}$$

$$\overrightarrow{r}'_{(-q_{izq})} = -r\hat{\jmath} - d\hat{\imath}$$

$$\overrightarrow{r}'_{(-q_{der})} = -r\hat{\jmath} + d\hat{\imath}$$

Con esto, podemos usar la definición y encontrar los campos producidos por cada carga.
Partimos con el campo eléctrico producido por $+2q$.

De la definición es posible deducir:

$$\overrightarrow{E}_{(+2q)} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\hat{\jmath}$$

A continuación,

$$\vec{E}_{(-q_{izq})} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath} + d\hat{\imath}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

$$\vec{E}_{(-q_{der})} = -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath} - d\hat{\imath}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Luego, el campo eléctrico total se puede calcular por superposición como sigue.
Primeramente, se establece que

$$\vec{E}_P = \vec{E}_{(+2q)} + \vec{E}_{(-q_{izq})} + \vec{E}_{(-q_{der})} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\hat{\jmath} + -\frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath} + d\hat{\imath}}{(r^2+d^2)^{3/2}} - \frac{q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath} - d\hat{\imath}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Se suprimen los campos de la componete $\hat{\imath}$.

$$\vec{E}_P = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{2q}{r^2}\hat{\jmath} + -\frac{2q}{4\pi\epsilon_0}\frac{r\hat{\jmath}}{(r^2+d^2)^{3/2}}$$

Con esto,

$$\vec{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right)\hat{\jmath}$$

B. Evalúe el caso límite $r \gg d$, ¿cómo varía la magnitud del campo eléctrico con la distancia en este caso?

HINT:

$$(1+\epsilon)^n \approx 1 + n\epsilon, \quad para \;\; \epsilon \ll 1$$

Para ver como se comporta en el caso límite, intentamos reordenar el campo en el punto P para aplicar alguna aproximación pertinente.

$$\vec{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{(r^2+d^2)^{3/2}}\right)\hat{\jmath} = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{r}{\left(r^2\cdot(1+\frac{d^2}{r^2})\right)^{3/2}}\right)\hat{\jmath}$$

$$\vec{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{\left(1+(\frac{d}{r})^2\right)^{-3/2}}{r^2}\right)\hat{\jmath}$$

Ocupando el Hint, se obtiene que:

$$\left(1+\frac{d^2}{r^2})\right)^{-3/2} \approx 1 - \frac{3}{2}\frac{d^2}{r^2}$$

Luego,

$$\overrightarrow{E}_P = \frac{q}{2\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^2} + \frac{3}{2r^2}\frac{d^2}{r^2}\right)\hat{\jmath}$$

Compactando todavía más la última expresión, se obtiene finalmente que:

$$\overrightarrow{E}_P^{\,r\gg d} = \frac{3qd^2}{4\pi\epsilon_0 r^4}\hat{\jmath}$$

Se advierte que para la aproximación utilizada, es decir, para $r \gg d$, la distribución de cargas mostrada genera un campo que decae como $\frac{1}{r^4}$, lo cual contrasta con el campo de una carga puntual que decae como $\frac{1}{r^2}$.

Consultas, sugerencias o reclamos:

diland.castro@ing.uchile.cl