Universidad de Chile
Facultad de Ciencias Físicas y Matemáticas
Departamento de Ingeniería Eléctrica

RESUMEN

ELECTROMAGNETISMO

Autor: Diland Castro C.
Fecha de realización: Marzo 2017
Combarbalá, Chile

Índice

Índice de figuras

1. Electrostática en el Vacío

Para iniciarnos en el estudio del electromagnetismo, partiremos considerando el caso en el cual la carga eléctrica se encuentra en un estado de reposo, de ahí el nombre de electrostática. Por otro lado, en esta sección solo nos preocuparemos cuando esta carga se encuentre en el vacío (más adelante viene más complejo, pero no taaanto :D).

1.1. Ley de Coulomb

La primera ley básica que nos ayuda a entender como se comporta una carga eléctrica en reposo es la conocida, Ley de Coulomb, ésta, nos entrega la magnitud de la fuerza que recibe una carga q_1 , en presencia de otra q_2.

$$|\overrightarrow{F_{q_1q_2}}(r)| = k\frac{q_1q_2}{r^2} = |\overrightarrow{F_{q_2q_1}}(r)|$$

Importante: r corresponde a la distancia existente entre las cargas.

1.2. El Campo Eléctrico

Cuando se ”coloca” una carga en algún lugar del espacio, decimos que esta carga produce un ”Campo Eléctrico”, aún mejor, podemos decir que la expresión para el campo eléctrico que produce una carga q_1 tiene la siguiente forma:

$$\overrightarrow{E_{q_1}}(r) = \frac{q_1\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3} = \frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^2}\hat{r}$$

Observación:

- $\hat{r} = \frac{\vec{r}}{\|r\|}$
- También es importante saber que el Campo Eléctrico corresponde matemáticamente un campo vectorial, y físicamente a una perturbación en el espacio producida por una carga.

1.2.1. ¿De dónde sale?

Debemos saber que existe una relación entre la fuerza que ”siente” una carga q_2 por la presencia de una carga q_1 , es decir, $\overrightarrow{F_{q_2q_1}}(r)$ y el campo producido por una carga q_1, esta relación es la siguiente:

$$\overrightarrow{F_{q_2q_1}}(r) = q_2\cdot\overrightarrow{E_{q_1}}(r) = q_2\cdot\underbrace{\frac{q_1\vec{r}}{4\pi\varepsilon_0 r^3}}_{Campo\ q_1} = q_2\cdot\frac{q_1}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}\|^2}\hat{r}$$

1.2.2. Generalizando una expresión para el Campo Eléctrico

Algunas veces, vamos a querer saber como es el campo eléctrico en una posición $\vec{r}$, producto de una carga ubicada en la posición $\vec{r}'$.

No confundirse:

$\vec{r}$	Donde se quiere conocer el campo
$\vec{r}'$	Donde se ubica la carga que produce el campo

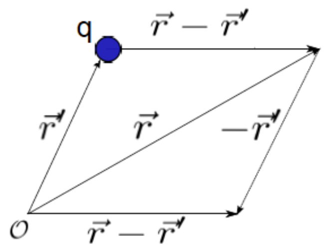


Figura 1: Campo producido por una carga en cualquier lugar del espacio

Teniendo claro el significado de cada vector posición, se tiene que la expresión para el campo eléctrico existente en $\vec{r}$, producto de una carga en la posición $\vec{r}'$ es:

$$\vec{E} = \frac{q(\vec{r}-\vec{r}')}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}-\vec{r}'\|^3}$$

OJO: Las dimensiones para el campo eléctrico son $[\frac{N}{C}]$, es decir, fuerza sobre carga eléctrica. Otra forma de equivalente sería $[\frac{v}{m}]$ vale decir, volt sobre metro, esto en el sistema MKS.

1.2.3. Principio de superposición

No siempre va a haber solo una carga que produzca campo, es más , sería muy fome. Por esto, es importante conocer el principio de superposición,que en simples palabras nos dice que el campo total es igual a la suma de los campos que produce cada carga.

$$\overrightarrow{E_{total}} = \vec{E_1}+\vec{E_2}+\vec{E_3}+...+\vec{E_n} = \sum_{i=1}^{n}\vec{E_i}$$

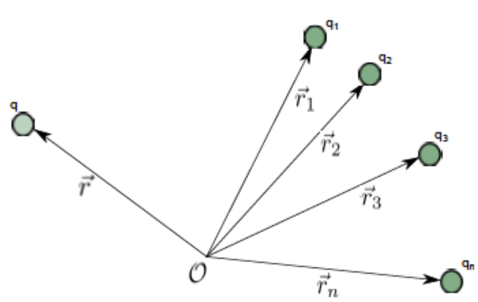


Figura 2: Principio de superposición(muchas cargas)

Recordando que hay una relación entre la fuerza que siente una carga, y el campo eléctrico que producen las demás cargas a su alrededor, podemos concluir algunas identidades importantes. Por ejemplo, la fuerza que siente la carga q , se expresa como:

$$\vec{F_q} = q\cdot\vec{E_1} + q\cdot\vec{E_2} + q\cdot\vec{E_3} + ... + q\cdot\vec{E_n} = q\cdot\sum_{i=1}^{n}\vec{E_i}$$

Notar que:

$$\sum_{i=1}^{n}\vec{E_i} = \frac{q_i(\vec{r}-\vec{r_i})}{4\pi\varepsilon_0\|\vec{r}-\vec{r_i}\|^3}$$

1.2.4. Campo eléctrico para distribuciones continuas de carga

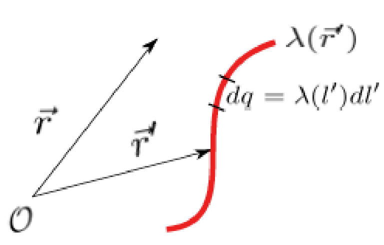
Para los casos en que no hay cargas puntuales,se debe acudir a las integrales (vistas como sumas infinitas), para obtener la expresión del campo eléctrico que produce una determinada distribución continua de carga. Esta puede ser de tres tipos: lineal, superficial y volumétrica.

Una forma de ”ver” este nuevo caso es considerar lo siguiente: $\sum \rightarrow \int$,por otro lado, q $\rightarrow$ dq . Aquí dq se ubica en la posición de $\vec{r}\,'$. El caso general corresponde a:

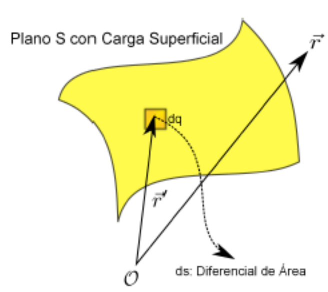
$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\vec{r}}\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}dq$$

Tipo	Densidad de carga	Elemento Diferencial de carga	Expresión final del campo eléctrico
Lineal	$\lambda(\vec{r}\,')[\frac{C}{m}]$	$dq = \lambda(\vec{r}\,')dl'$	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_\tau\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\lambda(\vec{r}\,')dl'$
Superficial	$\sigma(\vec{r}\,')[\frac{C}{m^2}]$	$dq = \sigma(\vec{r}\,')ds$	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int_\tau\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\sigma(\vec{r}\,')ds'$
Volumétrica	$\rho(\vec{r}\,')[\frac{C}{m^3}]$	$dq = \rho(\vec{r}\,')dv$	$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int_\tau\frac{(\vec{r}-\vec{r}\,')}{\|\vec{r}-\vec{r}\,'\|^3}\rho(\vec{r}\,')dv'$

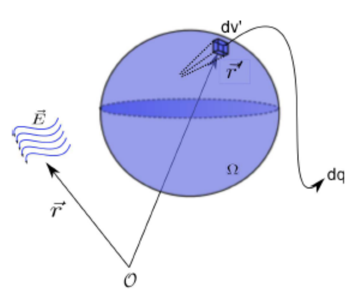
Cuadro 1: Formas del campo eléctrico para distintas distribuciones continuas de carga



(a) **Lineal**



(b) **Superficial**



(c) **Volumétrica**

Figura 3: Representación de distribuciones continuas de cargas

1.3. Ley de Gauss

La Ley de Gauss será muy importante para el estudio del electromagnetismo, y se debe ejercitar bastante para comprender bien como funciona y no equivocarse. Principalmente, se utiliza en los casos donde el cuerpo que se estudia posee simetría, y se pueda inferir que el campo eléctrico que se busca es de la forma $\overrightarrow{E} = \overrightarrow{E}(r)$. Ejemplos clásicos donde se utiliza la Ley de Gauss, son esféras y cilindros(cada caso debe analizarse con ciudado).

Para iniciarse en la aplicación de la Ley de Gauss, se debe conocer con anterioridad el concepto de flujo.

Se define el **flujo** ψ de $\overrightarrow{A}$ a través de una superficie S como, la siguiente integral de superficie:

$$\psi = \int\int_S \overrightarrow{A} \cdot d\overrightarrow{s} = \int\int_S \overrightarrow{A} \cdot ds \cdot \hat{n}$$

Otra ayuda importante corresponde al **Teorema de la divergencia** , que establece lo siguiente:

$$\int\oint_S \vec{A} \cdot d\vec{s} = \int\int\int_\Omega \nabla \cdot \vec{A} dv$$

Con lo anterior, podemos encontrar una relación para el campo eléctrico.

$$\Psi = \int\oint_S \vec{E} \cdot d\vec{s}$$

En ocasiones puede ser útil también, el **Teorema de Stokes** :

$$\oint_\gamma \vec{A} \cdot d\vec{r} = \int\int_S \nabla \times \vec{A} ds$$

1.3.1. Ley de Gauss

En palabras simples, la ley de Gauss nos dice que el flujo de campo eléctrico que pasa por una superficie cerrada S, es igual a la carga total encerrada por dicha superficie (Q_{total}) dividida por la constante ε_0.

$$\Psi = \int\int_S \vec{E} \cdot d\vec{s} = \frac{Q_{total}}{\varepsilon_0}$$

1.4. El Potencial Eléctrico

En ciertos casos, será más fácil utilizar el concepto de potencial eléctrico para obtener una expresión para el campo eléctrico. Se define el potencial eléctrico asociado a una carga q en la posición $\vec{r}'$ como:

$$V(\vec{r}) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{1}{|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r}'||}[V]$$

El potencial eléctrico también cumple con superposición, por lo que se tiene que:

$$V(\vec{r}) = \sum_{i=1}^{n} \frac{q_i}{4\pi\varepsilon_0|\overrightarrow{r} - \overrightarrow{r_i}'||} = \sum_{i=1}^{n} V_i$$

1.4.1. Potencial Eléctrico para distribuciones continuas de carga

De manera idéntica al campo eléctrico, puede encontrarse el potencial eléctrico para distintas distribuciones continuas de carga:lineales,superficiales y volumétricas.

Tipo	Densidad de carga	Elemento Diferencial de carga	Expresión final del potencial eléctrico
Lineal	$\lambda(\vec{r}')[\frac{C}{m}]$	$dq = \lambda(\vec{r}')dl'$	$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int_{\tau}\frac{\lambda(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dl'$
Superficial	$\sigma(\vec{r}')[\frac{C}{m^2}]$	$dq = \sigma(\vec{r}')ds$	$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int_{\tau}\frac{\sigma(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}ds'$
Volumétrica	$\rho(\vec{r}')[\frac{C}{m^3}]$	$dq = \rho(\vec{r}')dv$	$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int_{\tau}\frac{\rho(\vec{r}')}{\|\vec{r}-\vec{r}'\|}dv'$

Cuadro 2: Formas del potencial eléctrico para distintas distribuciones continuas de carga

1.4.2. Trabajo de un campo eléctrico

Sabemos que $\vec{F} = q\vec{E}$. También se tiene que $dW = -\vec{F}\cdot d\vec{l}$, si dW positivo, el trabajo lo hace el agente externo, si dW es negativo, el trabajo lo realiza el campo eléctrico.

Entonces, $dW = -\vec{F}\cdot d\vec{l}$, integramos de A (punto inicial) a B (punto final).

$$\Rightarrow W = \int_A^B dW = \int_A^B -\vec{F}\cdot d\vec{l} = -q\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

1.4.3. Diferencia de potencial

Una vez teniendo W , si se divide por q, se llega al trabajo por unidad de carga, o también llamado, energía por unidad de carga. A esa cantidad, se le denomina $Diferencia\ de\ potencial$ entre los puntos B(final) y A(inicial), se denota V_{BA}.

$$V_{BA} = V_B - V_A[V] = \frac{W}{q}[J\setminus C] = -\int_A^B \vec{E}\cdot d\vec{l}$$

IMPORTANTE: No confundir el concepto de ”potencial eléctrico”, con ”diferencia de potencial”, pueden parecer similares, pero son totalmente distintos, y confundirlos puede llevar a grandes errores.

1.4.4. La diferencia de potencial y una mirada más general al potencial eléctrico

Teniendo que...

$$V_{BA} = V_B - V_A = -\int_A^B \vec{E} \cdot d\vec{l}$$

Si se tiene que $B = r$ (variable) y que A= r_{ref} , se llega a que...

$$V(r) = -\int_r^{r_{ref}} \vec{E} \cdot d\vec{l} + V_{ref}$$

Una vez obtenida esta expresión, es posible darse cuenta de lo conveniente que resultaría si V_{ref} = 0 ,para así obtener el campo eléctrico, es por este motivo que la idea ahora será hacer un pequeño ”truco” (que requiere ejercitar bastante) , que consiste en dejar V_{ref} = 0. Con esto, el término que sobra se nos va y queda muchísimo más fácil obtener el potencial y con ello también , el campo eléctrico,según sea el caso.

Entonces,recapitulando, lo clave está en fijar una ”referencia conveniente” de tal modo que el potencial eléctrico en ese punto valga cero. Generalmente se utiliza el infinito,pero depende del caso a estudiar.

1.4.5. La estrecha relación entre Potencial eléctrico y Campo eléctrico

Podemos decir, que si se tiene el potencial eléctrico se obtiene el campo, y también viceversa, pero ¿Por qué?. De lo anterior y con un poco de álgebra, se puede llegar a la siguiente identidad, muy importante y útil.

$$\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$$

Es decir, el campo eléctrico se pude obtener calculando el gradiente de la función potencial.

IMPORTANTE: Se debe ser bastante cuidadoso con las coordenadas en las que se obtiene el potencial para después calcular su gradiente, pues generalmente, no es lo mismo el gradiente de una función en coordenadas esféricas que en cilíndricas. Asimismo, recalcar, que al calcular gradiente de una función, se obtiene un vector(en este caso, el vector campo eléctrico).

1.5. Primera Ley de Maxwell(en el vacío)

Partiendo de la ley de Gauss, y usando el teorema de la divergencia es posible llegar a una relación muy útil, conocida como Primera ley de Maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho}{\varepsilon_0}$$

Ordenando los términos, llegamos a ...

$$\nabla \cdot \ \varepsilon_0 \vec{E} = \rho$$

Usualmente, es conveniente definir el vector $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$ como $Vector\,Desplazamiento$, con esto, la primera ley Maxwell queda como sigue:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho$$

Observación: Esto para el vacío, pues aquí es donde se cumple que $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$

1.6. El campo eléctrico como un campo conservativo

A partir de $\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$,es posible obtener la siguiente identidad: $\Rightarrow \nabla \times \vec{E} = 0$. Con esto, se deduce que el campo eléctrico es conservativo.

Observaciones importantes:

- La conclusión de que el campo eléctrico es un campo conservativo, es aplicable solamente a situaciones de electrostática.
- También se puede obtener otra propiedad importante, ésta es que el trabajo neto realizado por el campo eléctrico es nulo cuando se considera una trayectoria cerrada, es decir,la fuerza que proviene de un campo eléctrico(en electrostática) es una fuerza conservativa.

1.7. El Dipolo eléctrico o momento dipolar

Un dipolo eléctrico corresponde a un sistema de dos cargas iguales pero de signo contrario, éstas se encuentran unidas por algún medio (no es relevante saber como XD), y se mantienen a una distancia d constante entre ellas, ver Figura 4.

Se define el dipolo o momento dipolar como $\vec{p} = qd\,\hat{r}$,

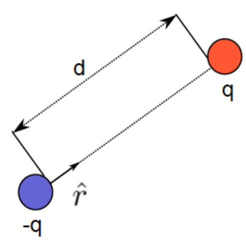


Figura 4: El dipolo eléctrico

Importante:

- La suma neta de las cargas de un dipolo debe ser nula.
- El vector apunta desde la carga negativa hacia la carga positiva.
- Las unidades de un dipolo o momento dipolar son $[C \cdot m]$.

1.7.1. Potencial eléctrico de un Dipolo

Cuando un dipolo se encuentra en un punto cualquiera, y sea $\vec{r}'$ el vector que indica la posición del punto medio del dipolo, como en la Figura 5.

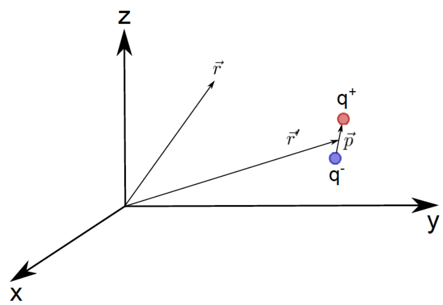


Figura 5: El dipolo eléctrico en un punto cualquiera

Se puede escribir el potencial eléctrico de un dipolo como sigue:

$$V(\vec{r}) = \frac{\vec{p}}{4\pi\varepsilon_0}\frac{\vec{r}-\vec{r}'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3}$$

Importante:

- Para calcular el campo eléctrico de un dipolo, se puede hacer uso de la relación $\vec{E}(\vec{r}) = -\nabla V(\vec{r})$

1.7.2. Dipolo de un conjunto de cargas y distribuciones

El dipolo es posible definirlo para muchas cargas y distribuciones continuas de las mismas, siempre recordando que se debe cumplir $\sum_{i=1}^{n} q_i = 0$

Luego, el dipolo para un conjunto de cargas se escribe como:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{n} q_i\vec{r}_k$$

Importante:

- Es posible ver que para n=2 , se cumple :
  $\vec{p} = q_1\vec{r}_1 + q_2\vec{r}_2$, pero como $q_1 = -q_2 \Rightarrow \vec{p} = Q(\vec{r}_1 - \vec{r}_2) = Q\vec{d}$.

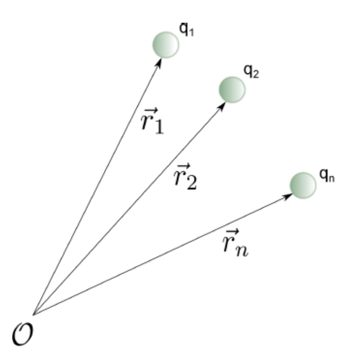


Figura 6: Dipolo de un conjunto de cargas

1.8. Técnicas especiales: Ecuación de Laplace y Poisson

Para ocupar estas ”técnicas” se debe contar con condiciones de borde y saber resolver EDO's . Por lo general, estos métodos facilitan bastante el camino para lograr determinar el campo eléctrico.

Se tiene entonces la ecuación de Poisson:

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = -\frac{\rho(\vec{r})}{\varepsilon_0}$$

Sin embargo, cuando no hay carga, se tiene la Ecuación de Laplace.

$$\nabla^2 V(\vec{r}) = 0$$

Importante:

- Nuevamente, es importante no confundirse entre las diferentes coordenadas que se utilizan al momento de resolver el problema.
- Sin condiciones de borde, es muy complicado (imposible) resolver un problema usando estas técnicas.
- Los pasos a seguir para usar estas técnicas son:
  Primero, resolver la EDO y encontrar el potencial, para más tarde usar la identidad $\nabla V(\vec{r}) = -\vec{E}(\vec{r})$ y así encontrar el campo eléctrico (CUIDADO con el signo -).

Fin de Electrostática ,*Ahora viene lo bueno *.**

2. Campos eléctricos en la materia

Para iniciar el estudió de las propiedades dieléctricas de la materia, primero es necesario aclarar algunos conceptos claves.

Importante:

- **Dieléctricos o aislantes:** materiales donde las cargas sólo pueden desplazarse en torno a su posición de equilibrio.
- **Conductores:** materiales donde las cargas pueden moverse libremente en la superficie o al interior del material.
- **Material no polar:** material que no posee dipolos con antelación a la aplicación del campo eléctrico externo.Al aplicar un campo externo, el material presentará pequeños desplazamientos de sus electrones en torno a una posición de equilibrio, los cuales pueden representarse a través de dipolos.
- **Material polar:** material en el cual, al aplicar un campo eléctrico externo se produce una alineación de los dipolos(poseen dipolos en forma natural).En estos materiales tampoco se produce una traslaciónn significativa de cargas ya que su estructura atómica impide el movimiento (fuerzas inter-nucleares).

2.1. El Vector polarización

El Vector Polarización ($\vec{P}$ mayúscula) como el momento dipolar por unidad de volumen de un dieléctrico:

$$\vec{P} = \lim_{\Delta v' \to 0} \frac{\sum_{i=1}^{n} Q_i \vec{d}_i}{\Delta v'} = \lim_{\Delta v' \to 0} [\frac{\sum_{i=1}^{n} \vec{p}_i}{\Delta v'}]$$

Importante:

- Los n dipolos $\vec{p}_k$ se encuentran en el volumen $\Delta v'$.
- Este vector es importantísimo para trabajar con los campos eléctricos en medios materiales

2.2. Potencial eléctrico en la materia

Considerando un elemento de volumen $\Delta v'$, puede establecerse que el potencial producido por este dipolo en una posición $\vec{r}$ es:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \int\int\int_{\Omega} \vec{P} \cdot \frac{\vec{r}-\vec{r}'}{||\vec{r}-\vec{r}'||^3} dv'$$

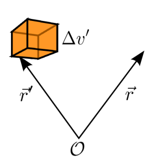


Figura 7: Potencial eléctrico de un elemento volumen

Luego,usando algunas identidades, teorema de la divergencia y que $\vec{P}\cdot d\vec{s} = \vec{P}\cdot\hat{n}dS$, se puede escribir el potencial como:

$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int_S \frac{\vec{P}\cdot\hat{n}}{||\vec{r}-\vec{r}'||}ds - \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\int\int\int_\Omega \frac{\nabla'\cdot\vec{P}}{||\vec{r}-\vec{r}'||}dv'$$

Por lo tanto, un medio material con polarización $\vec{P}$ produce un potencial eléctrico que puede expresarse mediante dos componentes (con una importante interpretación física que se analizará después).

2.3. Como actúa la Polarización y como se distribuye

Al aplicar un campo eléctrico a un material dieléctrico, este se reconfigura formando una distribución de carga en volumen $\rho_P(\vec{r}') = -\nabla\cdot\vec{P}$ y otra en su superficie $\sigma_P(\vec{r}') = \vec{P}\cdot\hat{n}$, tal como se muestra en la Figura 8.

Densidades de carga:

- En volumen , densidad volumétrica de carga de polarización $\rho_P(\vec{r}') = -\nabla\cdot\vec{P} = \rho_{p.\ volumen}$
- En superficie, densidad superficial de carga de polarización $\sigma_P(\vec{r}') = \vec{P}\cdot\hat{n}$

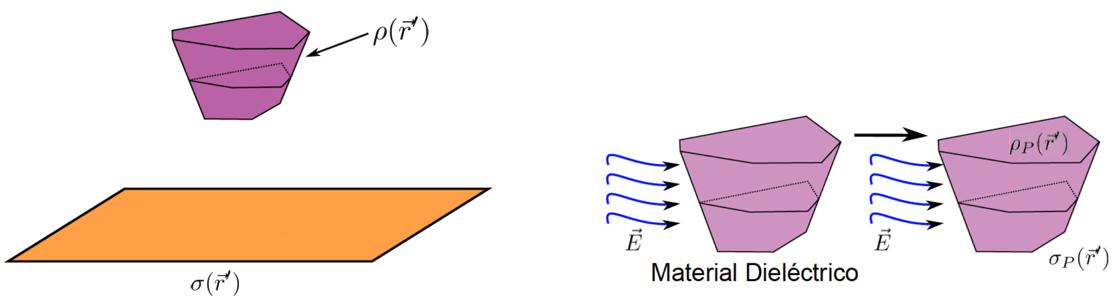


Figura 8: Como actúa la polarización en un dieléctrico

Observaciones:

- ρ_P **y** σ_P aparecen de la "reconfiguración" de los dipolos del material dieléctrico tras la aplicación de un campo eléctrico , **NO CORRESPONDEN A CARGAS LIBRES DENTRO DEL MATERIAL**.
- Las cargas de polarización producen campo eléctrico, pero la Carga Neta del material debe seguir siendo nula. Es decir:

  $$\iiint_\Omega \rho_{P.volumen}dv + \iint_S \sigma_P dS = 0$$

  PD: Se prueba con la definición de las densidades.
- Las cargas de $\rho_{P.volumen}$ y σ_P No se mueven (recordar que se obtienen de la "rotación" de los dipolos)
- Se considerarán como despreciables los efectos "locales" que producen los dipolos entorno a una vecindad, pues el efecto del resto de los dipolos será mucho mayor.
- Notar que $\vec{P}$, en realidad es $\vec{P}(\vec{r})$(evaluado) , se debe tener en consideración cuando se analizan las normales (**interiores**) a cada superficie

2.4. La primera ley de Maxwell en un medio dieléctrico (Generalización

Sabemos que La primera ley de Maxwell en el vacío, para una distribución de **carga libre** ρ_{libre} (con carga libre se refiere a la carga que es "parte" , o puesta ahí a propósito), que no es generada por polarización(reordenamiento de dipolos) del material.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\varepsilon_0}$$

Aquí $\rho_{total} = \rho_{libre} + \rho_{p.\ volumen}$, aquí se agrega el efecto de la polarización.

En el espacio vacío se tienen casos ideales , donde $\vec{P} = 0$ y se cumple que $\vec{D} = \varepsilon_0 \vec{E}$.

Sin embargo, como ahora interesa ver un caso más general (medios materiales), se debe modificar la primera ley de maxwell.

$$\nabla \cdot \vec{E} = \frac{\rho_{\rho_{libre}+\rho_{p.\ volumen}}}{\varepsilon_0}$$

$$\Rightarrow \rho_{libre} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E}) - \rho_{p.\ volumen}$$

Usando la definición de $\rho_{p.\ volumen} = -\nabla \cdot \vec{P}$, se tendrá que:

$$\rho_{libre} = \nabla \cdot (\varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P})$$

Por este motivo, se define el **vector desplazamiento eléctrico o densidad de flujo eléctrico en medios materiales** como:

$$D = \varepsilon_0 \vec{E} + \vec{P}$$

Con esto, la primera ecuación de maxwell, aplicada a medios materiales queda como:

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_{libre}$$

Asimismo, como

$$Q_{libre\ total} = \iiint_{\Omega} \rho_{libre}\, dv$$

2.5. Ley de Gauss en medios materiales

Mediante lo anterior, es posible generalizar la ley de Gauss para poder usarla en medios materiales, esto queda como:

$$\oiint_S \vec{D} \cdot d\vec{s} = Q_{libre\,total}$$