Universidad de Chile
Facultad de Cs. Físicas y Matemáticas
Departamento de Física
FI2002 Electromagnetismo - Semestre Otoño 2017

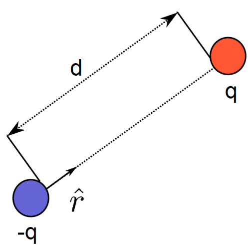
Auxiliar 6: Dipolo eléctrico y polarización

Profesor: Matías Montesinos
Auxiliares: Fabián Álvarez & Diland Castro
Fecha: 24 de Abril de 2017

Resumen :)

¿Qué es un dipolo eléctrico?

Es un sistema que se compone de dos cargas idénticas pero de signo contrario, las cuales se encuentran forzadas a mantener una distancia d constante entre ellas, como se muestra a continuación.



Se define el **dipolo eléctrico o momento dipolar** como:

$$\vec{p} = [q \cdot d]\hat{r} \tag{1}$$

Observaciones:

La suma neta de las cargas de un dipolo debe ser nula y el vector apunta desde la carga negativa hacia la positiva. Las unidades del dipolo son $[C \cdot m]$.

El momento dipolar de una distribución discreta de N cargas se escribe como:

$$\vec{p} = \sum_{i=1}^{N} \vec{x_i} q_i \tag{2}$$

Se debe cumplir que la suma total de cargas es nula, en cuyo caso, la definición no depende del origen escogido.

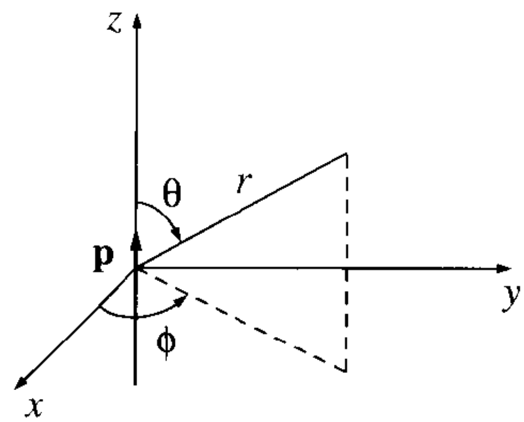
$$Q = \sum_{i=1}^{N} \vec{x_i} q_i = 0$$

Potencial de un Dipolo

$$V_{dip}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{p \cdot \hat{r}}{r^2} = \frac{p cos(\theta)}{4\pi\epsilon_0 r^2} \tag{3}$$

Campo eléctrico de un Dipolo

$$E_{dip}(r,\theta) = \frac{p}{4\pi\epsilon_0 r^3}(2cos(\theta)\hat{r} + sin(\theta)\hat{\theta}) \tag{4}$$



Expansión multipolar del potencial:

Sea una fuente finita definida por una distribución volumétrica $\rho(\vec{r})$ de carga. El potencial de esta fuente de cargas queda determinado por:

$$V_q(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \int \left(\frac{\rho(\vec{r'})\, dV'}{||\vec{r} - \vec{r'}||} \right) \tag{5}$$

Nos interesa el campo lejano de la distribución de carga dada anteriormente.

Se elige entonces un punto $\vec{r}$ lejos de la fuente tal que asumimos: $r >> r'$.

Haciendo una expansión...

$$\frac{1}{||\vec{r} - \vec{r'}||} = \frac{1}{r} + \frac{\vec{r} \cdot \vec{r'}}{r^3} + ...T.O.S$$

Luego, el potencial puede escribirse como:

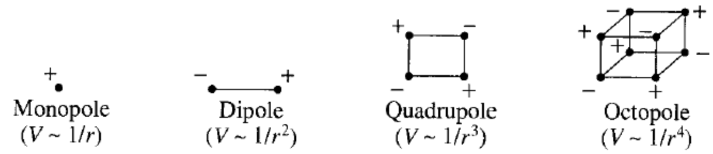
$$V(\vec{r}) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{Q}{r} + \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{\vec{p}\cdot\vec{r}}{r^3} + ... \tag{6}$$

Donde:

$$Q = \int \rho(\vec{r}')\, dV' = carga\ total \tag{7}$$

$$\vec{p} = \int \vec{r}'\rho(\vec{r}')dV' = momento\ dipolar\ total \tag{8}$$

Importante: Si $Q = 0$, el término dominante es el dipolar eléctrico.



MEDIOS MATERIALES

$$\nabla\cdot\vec{E} = \frac{\rho_{total}}{\epsilon_0} \tag{9}$$

Se define el vector Desplazamiento $\vec{D}$ como:

$$\vec{D} = \epsilon\vec{E} \tag{10}$$

Con esto, se tiene la siguiente relación,

$$\nabla\cdot\vec{D} = \rho_{libre} \tag{11}$$

Es importante incorporar el concepto de $\vec{P}$ que es el Vector Polarización, y se define como el momento dipolar por unidad de volumen.

$$\vec{P} = \epsilon_0\chi_e\vec{E} = \vec{E}(\epsilon - \epsilon_0) \tag{12}$$

Al aplicar un campo eléctrico a un dieléctrico, este se reconfigura y ahora se distinguen dos distribuciones de carga.

- $$\rho_P(\vec{r}') = -\nabla\cdot\vec{P} = \rho_{Pol.Vol}\quad (volumen) \tag{13}$$

- $$\sigma_P(\vec{r}') = \vec{P}\cdot\hat{n}\quad (superficial) \tag{14}$$

- $\rho_P(\vec{r}')$ y $\sigma_P(\vec{r}')$ aparecen por polarización y NO CORRESPONDEN A CARGAS LIBRES dentro del material.

- $$\iiint_V \rho_P dv + \iint_S \sigma_P = 0 \tag{15}$$

- $\vec{P} = \vec{P}(\vec{r})$, muy importante para calcular las distintas densidades y verificar las normales(interiores) a cada superficie.

- $$\rho_{total} = \rho_{\rho_{libre}} + \rho_{pol.\ vol} \tag{16}$$

Vector desplazamiento eléctrico o densidad de flujo eléctrico en medios materiales:

$$\vec{D} = \epsilon_0\vec{E} + \vec{P} = \epsilon\vec{E} \tag{17}$$

$$\epsilon = \epsilon_0(1 + \chi_e) \tag{18}$$

$$\epsilon = \epsilon_0\epsilon_r \tag{19}$$

Ley de Gauss en Materiales

$$\oiint_S \vec{D}\cdot d\vec{s} = Q_{libre\ encerrada} \tag{20}$$

Condiciones de Borde: Si se considera:

$$\vec{E}_1 = \vec{E}_{1\,tangente} + \vec{E}_{1\,normal} \tag{21}$$

$$\vec{E}_2 = \vec{E}_{2\,tangente} + \vec{E}_{2\,normal} \tag{22}$$

Con esto, se debe cumplir lo siguiente:

Para el Campo Eléctrico

$$\vec{E}_{1\,tangente} = \vec{E}_{2\,tangente} \tag{23}$$

Para el Vector Desplazamiento

$$D_{1\,normal} - D_{2\,normal} = \sigma_l \tag{24}$$

Importante: El Potencial es continuo, en la interfaz de un medio 1 a otro 2 se cumple que:

$$V_{medio\ 1} = V_{medio\ 2} \tag{25}$$

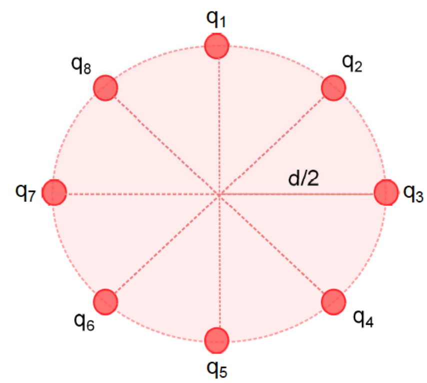
Auxiliar 6: Dipolo eléctrico y polarización

Profesor: Matías Montesinos
Auxiliares: Fabián Álvarez & Diland Castro

Fecha: 24 de Abril de 2017

P1. **[Dipolo eléctrico]**

Se tienen 8 cargas dispuestas como en la figura. Se desea saber el efecto de agregar una novena carga Q al sistema.



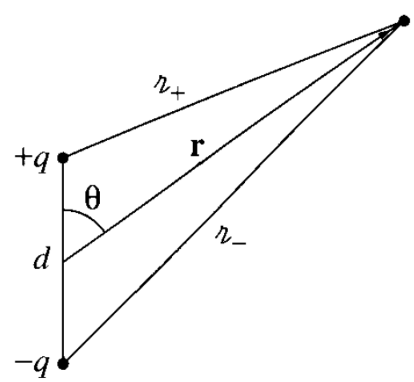
Se sabe que las cargas satisface las relaciones $Q = -\sum_{k=1}^{8}$, con $q_k = -\frac{Q}{8}$. De acuerdo a la configuración descrita, se pide calcular.

(a) El momento dipolar cuando se ubica una carga Q en el centro.

(b) El momento dipolar cuando se ubica una carga Q en la posición $x = -\frac{d}{4}$. Donde d es el diámetro de la circunferencia.

P2. **[Dipolo eléctrico]**

Se tienen dos cargas +q y $-q$ separadas una distancia d, como se muestra en la figura.

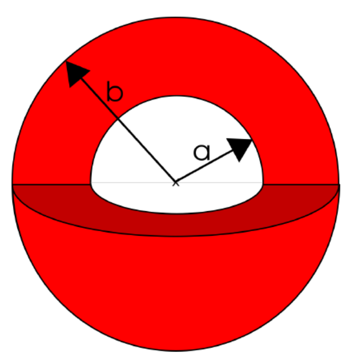


(a) Determine el potencial eléctrico de la configuración en algún punto alejado.
HINT: Considere las aproximaciones correspondientes y puede ayudarse de las distancias r_+ y r_-.

(b) Encuentre el campo eléctrico de la configuración.

P3. **[Campo en materiales]**

En una esfera de radio a se distribuye homogéneamente una carga Q. Alrededor de ella se sitúa una capa dieléctrica de radio interior a y radio exterior b, cuya permitividad es $\epsilon = \frac{k}{r^2}$.



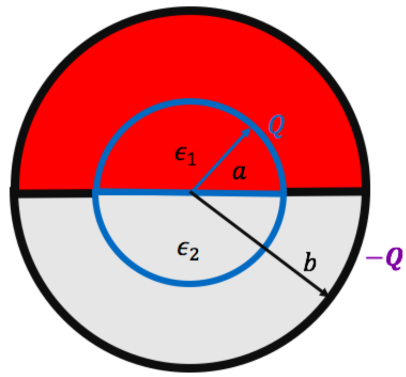
(a) Determine los vectores $\vec{D}$ y $\vec{E}$ en la capa dieléctrica.

(b) Obtener las densidades de carga de polarización en el dieléctrico.

(c) Verificar que la carga total de polarización es nula.

P4. [Condiciones de Borde y Conductores]

El espacio entre dos superficies esféricas concéntricas conductora (Similar a una Pokebola), (con cargas Q y $-Q$ y radios a y b respectivamente, $a < b$), está lleno con dos materiales dieléctricos caracterizados por ϵ_1 y ϵ_2 respectivamente. Estos dos materiales están separados por un plano ecuatorial. Suponga que los campos son proporcionales a $\hat{r}$.



(a) Obtenga la densidad de carga libre en cada una de las cuatro superficies semiesféricas.

(b) Encuentre los valores de desplazamiento eléctrico que caracterizan la esfera.

(c) Obtenga la diferencia de potencial entre los cascarones esféricos. ¿Aparecen cargas de polarización? ¿Dónde?¿Cómo las calcularía?.