FI2002-5 Electromagnetismo
Profesor: Matías Montecinos
Auxiliares: Fabián Álvarez & Diland Castro.

Pauta auxiliar 5

17 de Abril de 2017

1 Relaciones Útiles

$$\vec{D} = \epsilon \vec{E} \quad (1)$$

$$\nabla \cdot \vec{D} = \rho_l \quad (2)$$

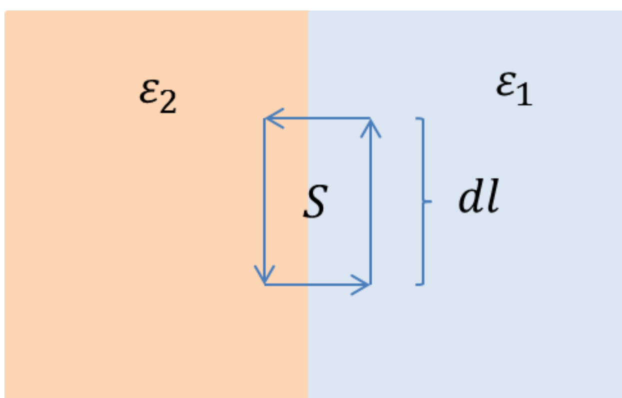
$$\vec{P} = (\epsilon - \epsilon_0)\vec{E} \quad (3)$$

$$\sigma_p = \vec{P} \cdot \hat{n} \quad (4)$$

$$\rho_P = -\nabla \cdot \vec{P} \quad (5)$$

2 Soluciones

P1. a) Primero encontramos las relaciones que deben satisfacer los campos en las distintas zonas, usamos el hecho de que $\nabla \times \vec{E} = 0$, como las placas son infinitas, supondremos que el campo es vertical y de valor constante, distinto en cada zona ($\vec{E} = E\hat{y}$). Integramos sobre el camino que se muestra abajo:



$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{dr} = (E_1 - E_2)dl = \int_S (\nabla \times \vec{E}) \cdot \vec{dS} = 0 \quad (6)$$

$$\Rightarrow E_1 = E_2 = E \quad (7)$$

Supondremos que en la parte izquierda de la placa inferior, la carga **libre** se distribuye con densidad σ_2, y en la parte derecha con σ_1, y hacemos un cilindro infinitesimal en el borde:

$$\oint_S \vec{D} \cdot \vec{dS} = D_2 dS = Q_l = \sigma_2 dS \quad (8)$$

$$\Rightarrow D_2 = \epsilon_2 E_2 = \epsilon_2 E = \sigma_2 \tag{9}$$

Análogamente para la sección derecha:

$$D_1 = \epsilon_1 E_1 = \epsilon_1 E = \sigma_1 \tag{10}$$

Por otro lado, tenemos que la carga total **libre** viene dada por:

$$\frac{A}{2}(\sigma_1 + \sigma_2) = Q_l \tag{11}$$

Reemplazando lo obtenido en las ecuaciones (9) y (10):

$$\frac{A}{2}E(\epsilon_1 + \epsilon_2) = Q_l \tag{12}$$

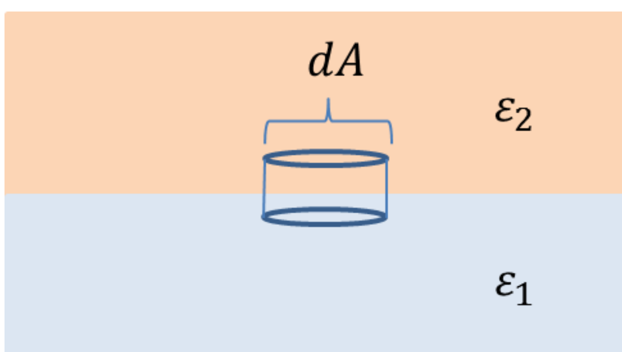
$$E = \frac{2Q_l}{A(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \tag{13}$$

$$\Rightarrow \Delta V = E \cdot d = \frac{2Q_l d}{A(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \tag{14}$$

$$\Rightarrow C = \frac{Q_l}{\Delta V} = \frac{A(\epsilon_1 + \epsilon_2)}{2d} = \frac{A\epsilon_1}{2d} + \frac{A\epsilon_2}{2d} \tag{15}$$

Notemos que la capacitancia total es equivalente a la de 2 capacitancias de área $\frac{A}{2}$ y separación d y permitividad diferente, puestas en paralelo.

b) Usamos el echo de que $\nabla \cdot \vec{D} = 0$, nuevamente suponemos que el campo es vertical y de valor constante, distinto para cada onda, calculamos el flujo a través de un cilindro infinitesimal ubicado en la interfaz entre los 2 medios:



$$\oint_{cilidro} \vec{D} \cdot d\vec{S} = (D_2 - D_1)dA = 0 \tag{16}$$

$$\Rightarrow \epsilon_1 \vec{E_1} = \epsilon_1 \vec{E_2} \tag{17}$$

Supondremos que en la placa inferior la carga de distribuye con densidad $\sigma = \frac{Q_l}{A}$, análogo a la ecuación (9), tenemos que:

$$E_1 = \frac{\sigma}{\epsilon_1} = \frac{Q_l}{A\epsilon_1} \tag{18}$$

$$E_2 = \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} E_1 = \frac{Q_l}{A\epsilon_2} \tag{19}$$

Calculamos la diferencia de potencial, y con ella la capacitancia:

$$\Rightarrow \Delta V = E_1 \frac{d}{2} + E_2 \frac{d}{2} = \frac{Qd}{2A}(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2}) \tag{20}$$

$$\Rightarrow C = \frac{2A}{d}(\frac{1}{\epsilon_1} + \frac{1}{\epsilon_2})^{-1} = (\frac{d}{2A\epsilon_1} + \frac{d}{2A\epsilon_2})^{-1} \tag{21}$$

Notemos que lo anterior corresponde a la capacitancia de 2 condensadores, de área A y separación $\frac{d}{2}$ y permitividad diferente, puestos en serie,

P2. Como estamos en presencia de un conductor descargado, el cual envuelve una carga Q, tenemos que aparecerá en la superficie interior del conductor una carga $-Q$ y la exterior una carga Q, es inmediato que el campo en el interior del conductor es nulo, usaremos la ley de Gauss con el vector desplazamiento para calcular el campo eléctrico:

$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = 2\pi r L D(r) = Q \tag{22}$$

$$Q_{encerrada}(r) = \begin{cases} 0 & r < a \\ Q & a < r < b \\ 0 & b < r < c \\ Q & c < r \end{cases} \tag{23}$$

$$\Rightarrow D(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{2\pi r L}\hat{r} & a < r < b \\ 0 & b < r < c \\ \frac{Q}{2\pi r L}\hat{r} & c < r \end{cases} \tag{24}$$

$$\Rightarrow E(\vec{r}) = \begin{cases} 0 & r < a \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_1 r L}\hat{r} & a < r < b \\ 0 & b < r < c \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_2 r L}\hat{r} & c < r < d \\ \frac{Q}{2\pi\epsilon_0 r L}\hat{r} & d < r \end{cases} \tag{25}$$

Ahora que tenemos $\vec{E}$, podemos calcular $\vec{P_i} = (\epsilon_i - \epsilon_0)\vec{E}$ en cada dieléctrico, como tenemos polarización, tendremos que aparecen densidades de carga ligada en cada borde de los dieléctricos:

$$\sigma_1^p(r = a) = \vec{P_1}(a) \cdot (-\hat{r}) = -\frac{(\epsilon_1 - \epsilon_0)Q}{2\pi\epsilon_1 a L} \tag{26}$$

$$\sigma_1^p(r=b) = \vec{P}_1(b)\cdot(\hat{r}) = \frac{(\epsilon_1-\epsilon_0)Q}{2\pi\epsilon_1 bL} \tag{27}$$

$$\sigma_2^p(r=c) = \vec{P}_2(c)\cdot(-\hat{r}) = -\frac{(\epsilon_2-\epsilon_0)Q}{2\pi\epsilon_2 cL} \tag{28}$$

$$\sigma_2^p(r=d) = \vec{P}_2(d)\cdot(\hat{r}) = \frac{(\epsilon_2-\epsilon_0)Q}{2\pi\epsilon_2 dL} \tag{29}$$

Ahora como tenemos que se inducen cargas sobre la superficie del conductor, tendremos densidades de carga libre sobre estas:

$$\sigma_l(a) = -\frac{Q}{2\pi aL} \tag{30}$$

$$\sigma_l(b) = \frac{Q}{2\pi bL} \tag{31}$$

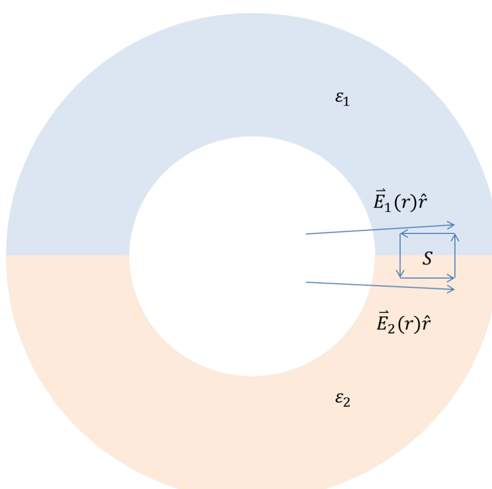
P3. a) Tenemos 4 regiones distintas, la interior, la zona de los dielectricos que se divide en 2, y la exterior. Para la primera y la ultima, podemos usar la ley de Gauss y tenemos que el campo es el que produce una carga puntual:

$$E(\vec{r}) = \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r^2}\hat{r}\ ;\ r\in[r,a]\cup[b,\infty) \tag{32}$$

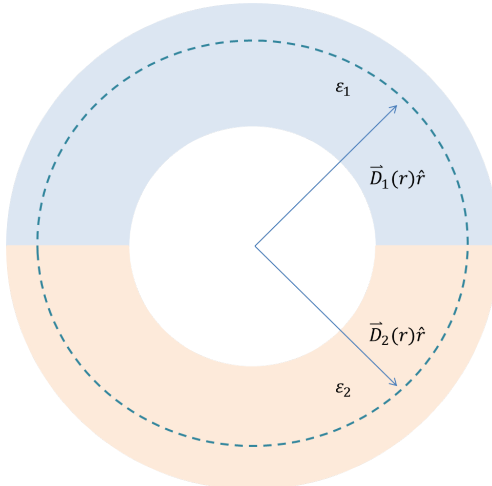
Para la regiones intermedias, usamos nuevamente que $\nabla\times\vec{E}=0$, y calculamos la integral sobre la curva infinitesimal que se muestra en la figura, supondremos, por simetría, que $\vec{E}=E_1(r)\hat{r}$ cuando $\theta\in[0,\frac{\pi}{2}]$ y $\vec{E}=E_2(r)\hat{r}$ cuando $\theta\in(\frac{\pi}{2},\pi]$:

$$\oint_{\partial S}\vec{E}\cdot d\vec{r} = (E_2(r)-E_1(r)dl = \int_S(\nabla\times\vec{E})\cdot d\vec{S} = 0 \tag{33}$$

$$\Rightarrow E_1(r) = E_2(r) \tag{34}$$



Es decir, el campo eléctrico pasa de forma **continua** de una región a la otra. Ahora usaremos la ley de Gauss, pero usando el vector desplazamiento para calcular la expresión de $E(r)$, calcularemos el flujo de a través de una superficie esférica de radio r :



$$\int_S \vec{D} \cdot d\vec{S} = \int_0^{\pi} \int_0^{2\pi} D(r)\hat{r} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi\theta\hat{r} \tag{35}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} D_1(r)\hat{r} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi\theta\hat{r} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} D_2(r)\hat{r} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi\theta\hat{r} \tag{36}$$

$$= \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{2\pi} \epsilon_1 E_1(r)\hat{r} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi\theta\hat{r} + \int_{\frac{\pi}{2}}^{\pi} \int_0^{2\pi} \epsilon_2 E(r)\hat{r} \cdot r^2 sen(\theta) d\phi\theta\hat{r} \tag{37}$$

$$= 2\pi r^2 E(r)(\epsilon_1 + \epsilon_2) = Q \tag{38}$$

$$E(\vec{r}) = \frac{Q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\hat{r} \tag{39}$$

b) Se define el infinito como punto de referencia para calcular el potencial, como el campo es de la forma $\frac{1}{r^2}$, tenemos que el potencial será de la forma $\frac{1}{r}$:

$$V(r) = -\int_{\infty}^{r} E(r)dr = \begin{cases} \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 r} \\ \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \\ \frac{Q}{4\pi\epsilon_0}\left(\frac{1}{r} - \frac{1}{a}\right) + \frac{Q}{2\pi(\epsilon_1+\epsilon_2)}\left(\frac{1}{a} - \frac{1}{b}\right) + \frac{Q}{4\pi\epsilon_0 b} \end{cases} \tag{40}$$

c) Calculamos la polarización en el material, y con ella las densidades:

$$\vec{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0)\frac{Q}{2\pi r^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\hat{r} \tag{41}$$

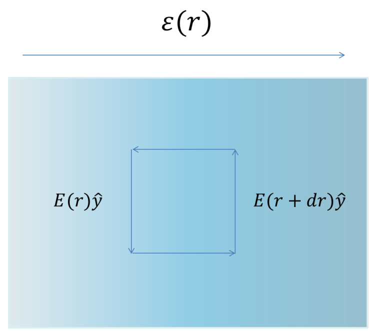
$$-\rho_i^p = \nabla \cdot \vec{P}_i = (\epsilon_i - \epsilon_0)\nabla \cdot \vec{E} = (\epsilon_i - \epsilon_0)\frac{Q}{2\pi(\epsilon_1 + \epsilon_2)}\nabla \cdot (\frac{\hat{r}}{r^2}) = 0 \tag{42}$$

$$\sigma_{i,a}^p = \vec{P}(a) \cdot (-\hat{r}) = -\frac{Q(\epsilon_i - \epsilon_0)}{2\pi a^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \tag{43}$$

$$\sigma_{i,b}^p = \vec{P}(a) \cdot (\hat{r}) = \frac{Q(\epsilon_i - \epsilon_0)}{2\pi b^2(\epsilon_1 + \epsilon_2)} \tag{44}$$

Las densidades σ_1 aparecen en las superficies superiores, mientras que las σ_2 aparecen en la inferiores.

P4. Al igual que en los problemas anteriores, aprovecharemos que $\nabla \times \vec{E} = 0$, supondremos que el disco es muy grande, por lo que $\vec{E} = E(r)\hat{y}$, notemos que como la permitividad depende del radio, el campo **no** depende de la altura, haremos un camino de integración como el que se muestra en la figura entre r uy $r + dr$:



$$\oint_{\partial S} \vec{E} \cdot \vec{dr} = (E(r + dr) - E(r))dl = 0 \tag{45}$$

$$E(\vec{r}) = E(r \vec{+} dr) = E \tag{46}$$

Lo anterior nos dice que el campo no depende de r, por lo tanto el campo eléctrico es **constante** en el espacio entre los discos. Usamos el echo de que la diferencia de potencial entre los discos es $V_0 = E \cdot d$, con lo que tenemos que $\vec{E} = \frac{V_0}{d}\hat{y}$ y por lo tanto $\vec{D} = \frac{V_0}{\epsilon(r)d}\hat{y}$

P5. Recogemos el resultado de la parte a) de la pregunta 1, tenemos que la capacitancia del condensador es la suma de las capacitancias de zona con aire más la de la zona con el dieléctrico, donde $A_i(y)$ es el área de cada condensador:

$$C_1 = \frac{A_1(y)\epsilon_0}{d}; A_1 = ay \tag{47}$$

$$C_2 = \frac{A_2(y)\epsilon}{d}; A_2 = a(a - y) \tag{48}$$

$$C(y) = \frac{ay\epsilon_0 + a(a - y)\epsilon}{d} = \frac{a^2\epsilon + ay(\epsilon_0 - \epsilon)}{d} \tag{49}$$

Calculamos la energía asociada al condensador:

$$U = \frac{C(y)V_0^2}{2} \tag{50}$$

Calculamos la fuerza asociada la energía potencial:

$$\vec{F} = -\frac{\partial U(y)}{\partial y}\hat{y} = -\frac{a(\epsilon_0 - \epsilon)V_0^2}{2d}\hat{y} \tag{51}$$

Como tenemos que siempre $\epsilon > \epsilon_0$, la fuerza que produce el condensador apunta hacia arriba, si igualamos esta fuerza al peso del bloque, obtenemos una ecuación para despejar ϵ:

$$\frac{a(\epsilon - \epsilon_0)V_0^2}{2d} = mg \tag{52}$$

$$\Rightarrow \epsilon = \epsilon_0 + \frac{2dmg}{a} \tag{53}$$