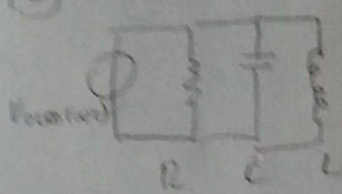
P2)



a) Calcule la impedancia del circuito

b) Calcule frecuencia de resonancia si los hay

c) calcule la potencia promedio

a) Como el circuito es en paralelo:

$$\frac{1}{Z_{eq}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{Z_c} + \frac{1}{Z_L}$$

$$= \frac{1}{R} + i\omega C + \frac{1}{i\omega L}$$

$$= \frac{1}{R} + i\omega C - \frac{i}{\omega L}$$

$$= \frac{1}{R} + \frac{i(\omega^2 LC - 1)}{\omega L} = \frac{\omega L + iR(\omega^2 LC - 1)}{\omega LR}$$

$$= \frac{(\omega^2 L^2 + R^2(\omega^2 LC - 1)^2)^{1/2} e^{i\phi}}{\omega LR} \; ; \; \phi = \arctan\left(\frac{R(\omega^2 LC - 1)}{\omega L}\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{Z_{eq} = \frac{\omega LR\, e^{-i\phi}}{(\omega^2 L^2 + R^2(\omega^2 LC - 1)^2)^{1/2}}}$$

. Pasamos a fasores: $V(t) = V_0 \cos(\omega t) \longrightarrow \tilde{V}(t) = V_0 e^{i\omega t}$

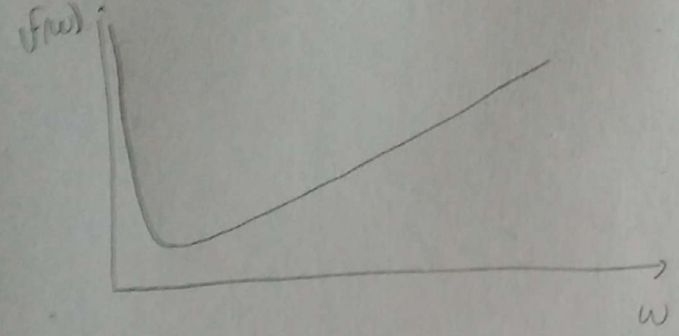
. Tenemos que

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z_{eq}} = \frac{(\omega^2 L^2 + R^2(\omega^2 LC - 1)^2)^{1/2}}{\omega LR} V_0 e^{i(\omega t + \phi)}$$

$$= f(\omega) V_0 e^{i(\omega t + \phi)} \; ; \; f(\omega) = \frac{(\omega^2 L^2 + (\omega^2 LC - 1)^2)^{1/2}}{\omega LR}$$

Los máximos de $f(\omega)$ corresponden a las frecuencias de resonancia

Luego $f(\omega)$ no tiene máximos en este caso, solo tiene los mínimos:



No hay frecuencias de resonancia.

c) Tenemos que $P = IV$, con $I = Re(\tilde{I})$ y $V = Re(\tilde{V})$

$$\Rightarrow P = f(\omega) V_0 \cos(\omega t + \phi) \cdot V_0 \cos(\omega t)$$

$$= f(\omega) V_0^2 \cos(\omega t)\left(\cos(\omega t)\cos(\phi) - \operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\phi)\right)$$

$$= f(\omega) V_0^2 \left(\cos^2(\omega t)\cos(\phi) - \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\phi)\right)$$

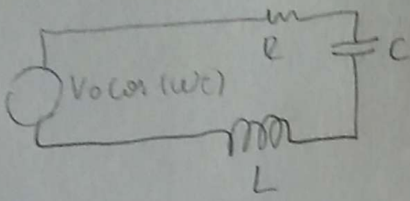
Nos interesa el promedio temporal, es decir, $\langle P \rangle$. Sabemos que $\langle \cos^2(\omega t) \rangle = 1/2$

y que $\langle \operatorname{sen}(\omega t)\cos(\omega t) \rangle = 0$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = f(\omega) V_0^2 \left(\langle \cos^2(\omega t) \rangle \cos(\phi) - \langle \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t) \rangle \operatorname{sen}(\phi) \right)$$

$$= f(\omega) V_0^2 \langle \cos^2(\omega t) \rangle = \frac{f(\omega) V_0^2}{2}$$

Ahora veamos un RLC en serie.



$$Z = R + Z_C + Z_L = R + \frac{1}{i\omega C} + i\omega L = R - \frac{i}{\omega C} + i\omega L$$

$$= R + i\left(\frac{\omega^2 LC - 1}{\omega C}\right) = \frac{\omega \cancel{C} R + iL\cancel{C}(\omega^2 - 1/LC)}{\omega \cancel{C}}$$

$$= \frac{L}{\omega}\left(\frac{\omega R}{L} + i(\omega^2 - \omega_0^2)\right)$$

$$= \frac{L}{\omega}\left(\omega\gamma + i(\omega^2 - \omega_0^2)\right) \quad \text{con } \omega_0^2 = 1/LC \text{ y } \gamma = R/L$$

Usamos fasores:

$$\tilde{I} = \frac{\tilde{V}}{Z} = \frac{\omega V_0 e^{i\omega t}}{L(\omega\gamma + i(\omega^2 - \omega_0^2))} = \frac{\omega V_0 e^{i(\omega t - \phi)}}{L(\omega^2\gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)^{1/2}}$$

$$\text{con } \phi = \arctan\left(\frac{(\omega^2 - \omega_0^2)}{\omega\gamma}\right)$$

$$\Rightarrow \tilde{I} = f(\omega)\frac{V_0 e^{i(\omega t - \phi)}}{L}$$

$$f(\omega) = \frac{\omega}{(\omega^2\gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)^{1/2}}$$

Maximizamos $f(\omega)$ para obtener la frecuencia de resonancia:

$$\Rightarrow f'(\omega) = \frac{(\omega^2\gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)^{1/2} - \dfrac{\omega(2\omega\gamma^2 + 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2))}{2(\omega^2\gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)^{1/2}}}{(\omega^2\gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)} = 0$$

$$\Rightarrow (\omega^2\gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)^{1/2} = \frac{\omega(2\omega\gamma^2 + 4\omega(\omega^2 - \omega_0^2))}{2(\omega^2\gamma^2 + (\omega^2 - \omega_0^2)^2)^{1/2}}$$

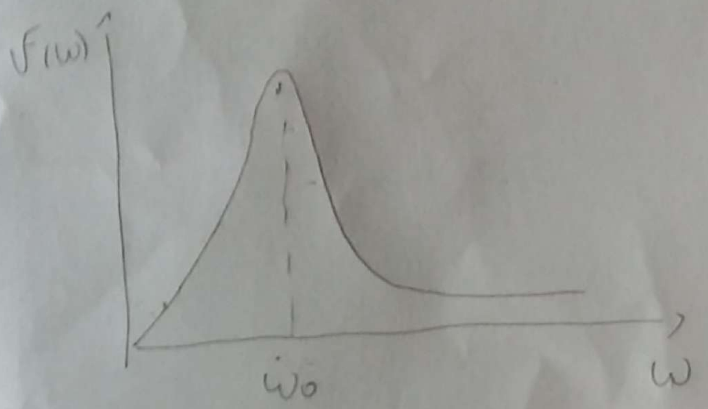
$$\Rightarrow \cancel{\omega^2\gamma^2} + (\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \cancel{\omega^2\gamma^2} + 2\omega^2(\omega^2 - \omega_0^2)$$

$$\Rightarrow (\omega^2-\omega_0^2)^2 = 2\omega^2(\omega^2-\omega_0^2)$$

$$\Rightarrow \omega^4 - \cancel{2\omega^2\omega_0^2} + \omega_0^4 = 2\omega^4 - \cancel{2\omega^2\omega_0^2}$$

$$\Rightarrow \omega^4 = \omega_0^4$$

$$\Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0}$$



Potencia disipada promedio, igual que en el caso anterior:

$$V = V_0 \cos(\omega t)$$

$$I = \frac{f(\omega) V_0}{2} \cos(\omega t - \phi)$$

$$\Rightarrow P = \frac{V_0^2}{L} f(\omega)\left(\cos^2(\omega t)\cos(-\phi) - \cos(\omega t)\operatorname{sen}(\omega t)\operatorname{sen}(\phi)\right)$$

$$\Rightarrow \langle P \rangle = \frac{V_0^2 f(\omega)}{2L}\cos(-\phi) = \frac{V_0^2 f(\omega)}{2L}\cos(\phi)$$

Scanned by CamScanner