Clase Auxiliar: Ejercicio 2
Circuitos en corriente alterna

18 de Noviembre de 2016

P1. Preguntas conceptuales

Responda brevemente las siguientes preguntas:

1. Suponga las siguientes configuraciones de circuito:
   - Fuente conectada a condensador
   - Fuente conectada a Inductor
   - Fuente conectada a Resistencia
   - Fuente conectada a Condensador con Inductor en serie.

   ¿En cuál de las configuraciones mencionadas el voltaje adelanta a la corriente? Comente que sucedería en cada una de las configuraciones.

2. Se requiere diseñar un circuito para alimentar la batería de un teléfono celular que funciona con corriente continua. Para ello, le piden a usted diseñar un rectificador de onda completa para una onda sinusoidal de frecuencia f=50[Hz] (Frecuencia eléctrica de la red). ¿En cuales de los siguientes caso se obtiene una onda con menor *ripple* (lo más rectificada posible)?
   - Con R=1 kΩ C=5mF
   - Con R=1 M Ω C= 50 μF
   - Con R=5k kΩ C= 100mF

3. Chile está ad portas de crear su propia industria de electrónica. Una consultora lo contrata a usted para que les explique como construir un diodo. ¿Qué le contestaría? Comente en relación a los materiales utilizados y junturas.

4. ¿Qué es la función de transferencia? ¿Cómo se calcula? ¿Qué metodología utilizaría para verificar el tipo de filtro al que corresponde?

5. Dibuje la carecterística I-V del diodo ideal, y luego del diodo no ideal. Compare.

P2. Circuitos en AC y función de transferencia.

Considere el siguiente circuito:

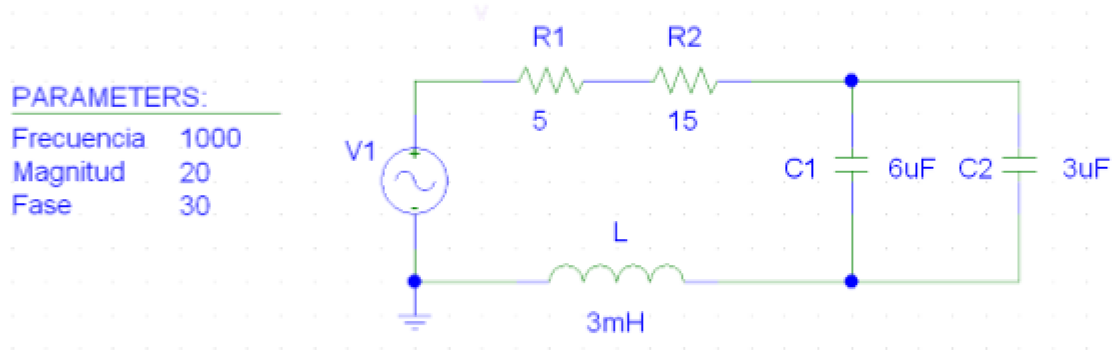

Figura 1: Circuito de la Pregunta 2.

Se le pide estudiar lo siguiente:

1. Voltajes y corrientes en cada uno de los elementos.
2. Considere como la salida del circuito ($Vout$) el condensador. Calcule la función de transferencia del circuito. ¿A qué tipo de circuito corresponde?

P3. Circuito con semiconductores.

En la Figura 2 se muestra un circuito compuesto de diodos, resistencias, y una fuente V_i.

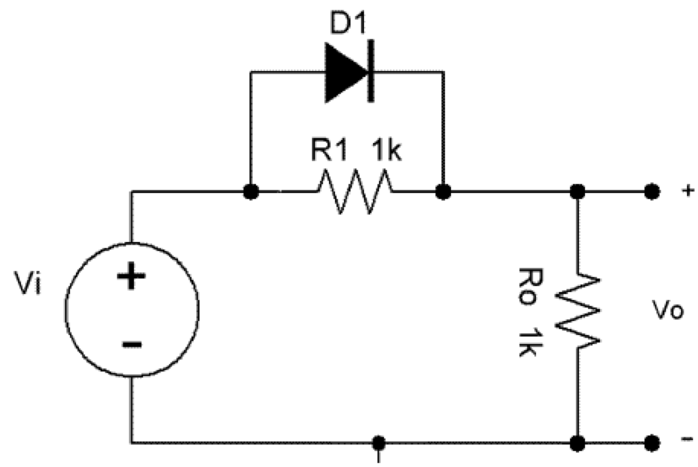

Figura 2: Circuito de la Pregunta 3.

Se le pide estudiar a cabalidad el circuito de la figura, para ello:

1. Considerando Diodo Ideal:
   a) Establezca las condiciones para que el diodo conduzca.
   b) Determine la característica V_0 en función de V_i
   c) Suponiendo una entrada sinusoidal de $V = 4V_{pp}$, grafique V_0 en función del tiempo.
2. Realice lo mismo que en (1) Suponiendo que ahora el diodo no es ideal, si no que uno de silicio con $V_{foward} = 0{,}7[V]$.

Solución Clase Auxiliar: Ejercicio 2
Circuitos en corriente alterna

22 de NoShaveNovember de 2016

P1. Preguntas conceptuales

1. Que el voltaje adelante a la corriente, significa que su fase es mayor. Matemáticamente, si el voltaje es

$$V = \sin(\omega t)$$

Entonces la corriente será una sinusoide de igual frecuencia pero puede estar desplazada en el tiempo:

$$I = \sin(\omega t + \phi)$$

Si es que ϕ es menor que cero, se dice que la corriente se atrasada respecto al voltaje, o bien que el voltaje adelanta a la corriente. Es decir, el voltaje recorre sus valores *antes* que la corriente recorra los suyos en un sentido de recorrer sus ciclos sinusoidales, tal como se observa en la Figura 1.

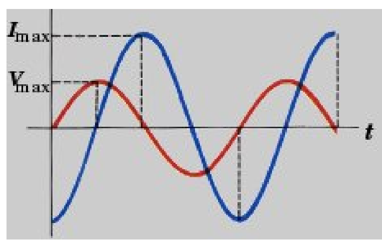

Figura 1: Voltaje que adelanta a la corriente.

En términos de fasores, se debe recordar que la unidad imaginaria i tiene 90° de fase positiva, por lo que se puede agregar o quitar esta fase multiplicando o dividiendo por i. Notar que dividir por i es equivalente a multiplicar por $-i$, por lo que el número $-i$ multiplicando es equivalente a quitar 90° de fase.

- Un condensador cumple la ecuación

$$V = Z_C I = \frac{I}{i\omega C} = -i\frac{I}{\omega C}$$

Por lo tanto, el voltaje posee 90° de fase menos que la corriente, implicando que no la adelanta.

- Un inductor cumple la ecuación

$$V = Z_L I = i\omega L I$$

Por lo tanto, el voltaje posee 90° de fase más que la corriente, implicando que la adelanta.

- Una resistencia tiene una impedancia real, por lo que no modifica la fase de la corriente al calcular el voltaje. Como el voltaje posee la misma fase que la corriente, no la adelanta.

- Cuando se tiene un condensador y un inductor en serie, debemos sumar sus impedancias, obteniendo:

$$V = (Z_C + Z_L)I = \left(i\omega L + \frac{1}{i\omega C}\right) I = i\left(\omega L - \frac{1}{\omega C}\right) I$$

En este caso, la condición de agregar o quitar fase depende del signo del término entre paréntesis, lo que depende de la magnitud relativa entre L y C. Cuando la expresión sea positiva (gana la inductancia), el voltaje tendrá mayor fase que la corriente, por lo que la adelanta. En cambio, cuando la expresión sea negativa (gana el condensador), el voltaje tendrá menor fase y por ende no adelanta a la corriente.

2. Una mejor rectificación se consigue cuando el condensador se descarga más lento, suavizando la curva rectificada como se observa en la Figura 2. La tasa de descarga está íntimamente ligada a $\tau = RC$, por lo que se busca que τ sea lo más grande posible. Evaluando cada caso:

   - $R = 1[k\Omega],\ C = 5[mF] \implies \tau = 5[s]$
   - $R = 1[M\Omega],\ C = 50[\mu F] \implies \tau = 50[s]$
   - $R = 5[k\Omega],\ C = 100[mF] \implies \tau = 500[s]$

   Entonces, el que produce menor ripple es el tercer caso.

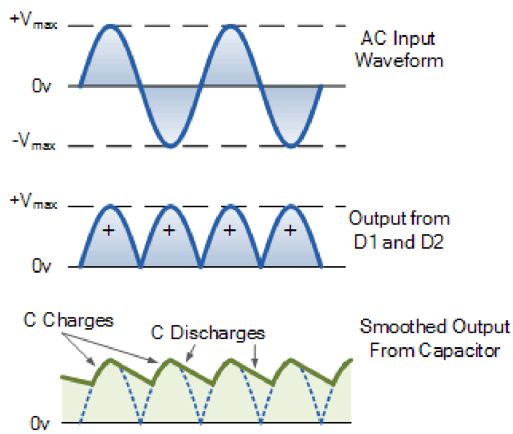

Figura 2: Rectificación de onda completa.

3. Análisis abierto, aunque en general se busca que se apunte a que los diodos son elementos fabricados en base a la unión de dos materiales semiconductores. Uno de ellos debe ser de tipo n (con predominancia de electrones) y otro de tipo p (con predominancia de huecos).

4. La función de transferencia es una función racional que describe la relación entre la salida y la entrada de un sistema. Bajo el contexto de este curso, el sistema será un circuito. Notar que se debe especificar siempre cuál es la variable eléctrica que se toma como salida del circuito, a menos que sea evidente. El cálculo de esta función se realiza analíticamente como

$$H(\omega) = \frac{V_{out}}{V_{in}}$$

   El objetivo entonces es encontrar una expresión de V_{out} que sea proporcional a V_{in} para luego calcular esta división. Notar que esto se debe realizar en el dominio de la frecuencia (ω), es decir, utilizando el formalismo de fasores e impedancias.

   Para verificar el tipo de filtro al que corresponde se debe observar el gráfico del módulo de la función de transferencia $|H(\omega)|$, versus la frecuencia ω. Por lo general, este gráfico es logarítmico debido a que se deben recorrer amplios rangos de órdenes de magnitud. El filtro puede ser:

   - **Filtro pasa-bajos**, si es que el gráfico muestra que la función de transferencia favorece a las frecuencias más bajas que una cierta frecuencia de corte ω_c.

- **Filtro pasa-altos**, si es que el gráfico muestra que la función de transferencia favorece a las frecuencias más altas que una cierta frecuencia de corte ω_c.
- **Filtro pasa-banda**, si es que el gráfico muestra que la función de transferencia favorece a las frecuencias que se ubican en un cierto intervalo que rodea a una frecuencia central ω_r, teniendo dos frecuencias de corte laterales ω_{c1} y ω_{c2}.

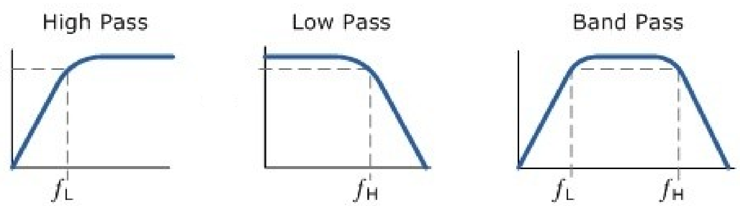

Figura 3: Tres tipos de filtros.

P2. Función de transferencia

1. En primer lugar se debe calcular el circuito equivalente, juntando los elementos cuando sea posible. Así, se tiene el circuito de la Figura 4, cuyos parámetros son:

$$R = R_1 + R_2 = 5[\Omega] + 15[\Omega]$$

$$C = C_1 + C_2 = 6[\mu F] + 3[\mu F] = 9[\mu F]$$

$$L = 3[mH]$$

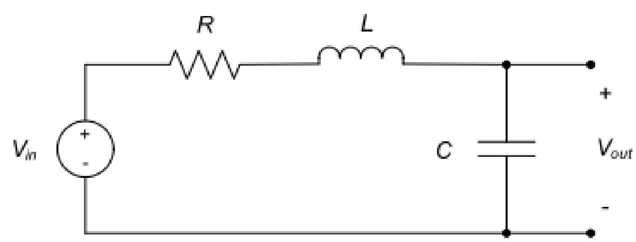

Figura 4: Circuito Equivalente RLC serie.

Recordar que las impedancias de cada elemento son ($\omega = 2\pi f = 2000\pi[rad^{-1}s]$):

$$Z_R = R = 20[\Omega] \quad Z_L = i\omega L = i18{,}85[\Omega] \quad Z_C = \frac{1}{i\omega C} = -i17{,}68[\Omega]$$

Utilizando el concepto de impedancia en los circuitos de corriente alterna, es posible resolver el circuito utilizando las mismas estructuras de ley de Ohm y de Kirchhoff que son útiles para el análisis de circuitos con resistencias en corriente continua. Puesto que el circuito está en serie, la misma corriente pasa a través de los tres elementos. Suponiendo que esta corriente es I, es posible saber que el voltaje en el condensador está dado por $V_C = I \cdot Z_C$, y solo nos falta conocer el valor de la corriente.

Para conocer el valor de la corriente, calculamos la Z_{eq}, que es simplemente la suma de las impedancias puesto que están conectadas en serie:

$$Z_{eq} = Z_R + Z_L + Z_C = (20 + i1{,}17)[\Omega]$$

Con el circuito reducido a uno con una fuente y una sola impedancia (la equivalente), es inmediato conocer la corriente[1] con la expresión análoga a la ley de Ohm, ($V_{in} = 20[V]$):

$$I = \frac{V_{in}}{Z_{eq}} = (0{,}997 - i0{,}058)[A]$$

Con este resultado, el voltaje por el condensador es igual a:

$$V_C = I \cdot Z_C = V_{in}\frac{Z_C}{Z_{eq}} = (-1{,}03 - i17{,}62)[V]$$

Notar que, gracias al concepto de impedancia, la resolución es totalmente análoga para calcular el voltaje en la resistencia y en la inductancia:

$$V_R = I \cdot Z_R = V_{in}\frac{Z_R}{Z_{eq}} = (19{,}93 - i1{,}16)[V]$$

[1] Es importante recalcar que la corriente calculada que pasa por la impedancia equivalente, es precisamente la corriente que pasa por cada uno de los elementos gracias a que están en serie. Si hubiese algún elemento en paralelo, se tendrían que hacer cálculos posteriores para separar la corriente en las ramas correspondientes.

$$V_L = I \cdot Z_L = V_{in} \frac{Z_L}{Z_{eq}} = (1{,}095 + i18{,}785)[V]$$

Estos resultados se conocen como división de voltajes, que ocurre siempre en un circuito en serie. El caso general en que se tienen $Z_1, Z_2, \ldots, Z_n$ impedancias conectadas en serie es que el voltaje en el elemento k-ésimo es igual a:

$$V_k = V_{in} \frac{Z_k}{Z_{eq}} = V_{in} \frac{Z_k}{Z_1 + Z_2 + \cdots + Z_n}$$

2. Se desea ahora encontrar la función de transferencia cuando el voltaje por el condensador V_C es considerado la salida del circuito V_o. Se pueden reciclar los resultados encontrados en la parte anterior, pero dejando a ω como una variable, puesto que ahora no se busca el caso particular de operación del circuito en $\omega = 2\pi f = 2000\pi[rad^{-1}s]$, sino que se desea encontrar la función $H(\omega)$, la cual recorre todos los ω.

   Entonces, la función de transferencia es:

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{V_C}{V_{in}} = \frac{Z_C}{Z_{eq}} = \frac{Z_C}{Z_R + Z_L + Z_C}$$

   Reemplazando las fórmulas de cada impedancia se tiene que:

$$H(\omega) = \frac{\frac{1}{i\omega C}}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{1}{1 - \omega^2 LC + i\omega RC}$$

   Para poder conocer a qué tipo de filtro pertenece esta función de transferencia, es necesario conocer el módulo de esta. Por lo tanto:

$$|H(\omega)|^2 = \frac{1}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} = \frac{1}{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 (R^2 C^2 - 2LC) + 1}$$

   Esta función vale 1 cuando $\omega = 0$ y tiende a cero cuando $\omega \to \infty$. Además, el polinomio del denominador es algo así como una parábola en ω^2, así que posee un valor mínimo, y es en este valor mínimo en donde la función de transferencia posee su máximo valor, que se visualizará como un peak en el gráfico de $|H(\omega)|$ versus ω. Este peak era esperado debido a que el circuito RLC es un circuito resonante amortiguado[2]. Por lo tanto, la función representa un filtro pasa-banda, cuya frecuencia de resonancia es cercana a la frecuencia natural del circuito $\omega_n = 1/\sqrt{LC}$.

   Como extensión de la solución, se podría también considerar que el voltaje por la resistencia es la salida:

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{V_R}{V_{in}} = \frac{Z_R}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{R}{R + i\omega L + \frac{1}{i\omega C}} = \frac{i\omega RC}{1 - \omega^2 LC + i\omega RC}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(\omega RC)^2}{(1 - \omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} = \frac{\omega^2 R^2 C^2}{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2 (R^2 C^2 - 2LC) + 1}$$

   En este caso, la función vale 0 cuando $\omega = 0$ y tiende a 0 cuando $\omega \to \infty$. El denominador es el mismo que antes, por lo que también existirá un valor peak de esta función entre estos dos casos extremos, y se tendrá un filtro pasa-banda más acentuado que el anterior ya que aquí además se atenúan fuertemente

[2] Es amortiguado debido a la presencia de la resistencia. Notar, por ejemplo, que si $R = 0$ entonces al tomar la frecuencia natural $\omega_n^2 = 1/(LC)$, el denominador se anularía y se tendría una amplitud infinita. Este infinito es eliminado por la presencia de la resistencia.

las frecuencias bajas. Además, el peak también se encontrará cerca de la frecuencia natural mencionada anteriormente.

Por último, se podría también considerar que el voltaje por la inductancia es la salida del sistema:

$$H(\omega) = \frac{V_o}{V_{in}} = \frac{V_L}{V_{in}} = \frac{Z_L}{Z_R + Z_L + Z_C} = \frac{i\omega L}{R + i\omega L + \dfrac{1}{i\omega C}} = \frac{-\omega^2 LC}{1 - \omega^2 LC + i\omega RC}$$

$$|H(\omega)|^2 = \frac{(\omega^2 LC)^2}{(1-\omega^2 LC)^2 + (\omega RC)^2} = \frac{\omega^4 L^2 C^2}{\omega^4 L^2 C^2 + \omega^2(R^2C^2 - 2LC) + 1}$$

En este caso, la función vale 0 cuando $\omega = 0$ y tiende a 1 cuando $\omega \to \infty$. Bajo los mismo argumentos anteriores, este es también un pasa-banda, en donde las frecuencias altas no son tan atenuadas. Además, el peak también se encontrará cerca de la frecuencia natural mencionada anteriormente.

Como observación final, notar que lo que hace al filtro pasa-banda es el hecho de que existe una banda central alrededor de la frecuencia de resonancia cuya amplitud es mayor a la que existe en las demás frecuencias. Supongamos que H_{max} representa la máxima amplitud de la función, la cual ocurre en la frecuencia de resonancia. Entonces en aquellas dos frecuencias laterales en que la amplitud decae a $H_{max}/\sqrt{2}$, o equivalentemente decae en 3dB, se tienen los límites de la banda del filtro[3].

[3] Este criterio se basa en que al decaer esta cantidad a partir de la amplitud máxima, se ha decaído a la mitad de la potencia máxima. Una potencia menor a la mitad de la potencia máxima se considerada que *no pasa* por el filtro. Este criterio también se aplica para encontrar el corte en un filtro pasa-bajos o uno pasa-altos.

P3. Circuito con semiconductores

En general, para saber si es que un diodo conduce o no, se debe uno fijar en la caída de voltaje que ocurre en él, y el sentido de la corriente que circula a través de él.

1. Caso ideal:

   a) Un diodo ideal conduce (se encuentra ON) cuando la corriente que circula por él lo recorre en sentido positivo, y la caída de voltaje que produce es nula. Esto ya que el modelo de un diodo ideal conduciendo es un corto-circuito. En cambio, un diodo no conduce (se encuentra OFF) cuando la caída de voltaje es negativa, y la corriente es nula. Esto ya que el modelo de un diodo ideal no conduciendo es un circuito abierto. En resumen, si V_D e I_D son el voltaje y la corriente por el diodo:

   $$\begin{aligned} ON &\Longleftrightarrow V_D = 0 \wedge I_D > 0 \\ OFF &\Longleftrightarrow V_D < 0 \wedge I_D = 0 \end{aligned}$$

   b) Para determinar la característica, se revisan los casos en que el diodo está encendido y apagado[4]. Cuando el diodo está apagado, la corriente a través de él es nula, por lo que toda la corriente que circula, pasa por R_1 y R_0. Es decir, estas dos resistencias se encuentran en serie. Con ello, y usando que $R_1 = R_0 = R$ y que por ambas pasa una corriente I, se puede calcular el voltaje en la salida:

   $$V_{in} = I_1R_1 + I_0R_0 = 2IR \Rightarrow I = \frac{V_{in}}{2R} \Rightarrow V_o = IR_0 = \frac{V_{in}}{2R}R = \frac{V_{in}}{2}$$

   Para que ocurra este caso, es necesario que el voltaje V_D sea negativo. Así que se debe tener:

   $$V_D = V_{in} - V_o = \frac{V_{in}}{2} < 0 \Leftrightarrow V_{in} < 0$$

   Ahora, cuando el diodo está encendido, el voltaje que cae a través de él es nulo, i.e. es un corto-circuito. Al ser un corto-circuito, toda la corriente pasa por el diodo. Esto provoca el efecto de que la resistencia R_1 desaparece para el circuito. Con esto, el circuito se reduce a uno en donde solo existe la fuente y la resistencia R_0. La salida es directamente:

   $$V_o = V_{in}$$

   Para que ocurre este caso, es necesario que la corriente que circula por el diodo circule en el sentido positivo de este, i.e. *desde* la fuente *hacia* la resistencia R_0. Para que esto sea posible, necesariamente:

   $$I_D = \frac{V_o}{R_o} = \frac{V_{in}}{R_0} > 0 \Leftrightarrow V_{in} > 0$$

   En resumen, la salida está dada por:

   $$V_o = \begin{cases} V_{in} & V_{in} > 0 \\ V_{in}/2 & V_{in} < 0 \end{cases}$$

[4] La manera eficiente de hacer esto es solo evaluar un caso, ya que al ser un solo diodo, el caso que falta es lo que queda fuera del rango del caso estudiado. Solo por fines didácticos se resolverán ambos estados del diodo.

c) Utilizando la característica encontrada anteriormente, para una entrada senusoidal se tiene la salida que se observa en la Figura 5. En ella se observa que para los semi-ciclos positivos, la salida copia perfectamente la entrada, mientras que para los semi-ciclos negativos, la salida es la mitad de la magnitud de la entrada.

Figura 5: Caso para el diodo ideal.

2. Caso no ideal:

a) El diodo simplificado no ideal con $V_{forward} = 0{,}7[V]$ conduce (se encuentra ON) cuando la corriente que circula por él lo recorre en sentido positivo, y la caída de voltaje que produce es igual a 0.7[V], constante. Es decir, este diodo requiere un voltaje mínimo distinto de cero para ser capaz de establecer una conducción. En cambio, el diodo no conduce (se encuentra OFF) cuando la caída de voltaje es menor a 0.7[V], y la corriente es nula. En este caso se sigue teniendo un circuito abierto. En resumen, si V_D e I_D son el voltaje y la corriente por el diodo:

$$ON \Longleftrightarrow V_D = 0{,}7 \wedge I_D > 0$$
$$OFF \Longleftrightarrow V_D < 0{,}7 \wedge I_D = 0$$

b) Cuando el diodo está apagado, la corriente a través de él es nula, por lo que toda la corriente que circula, pasa por R_1 y R_0. Es decir, estas dos resistencias se encuentran en serie. Con ello, y usando que $R_1 = R_0 = R$ y que por ambas pasa una corriente I, se puede calcular el voltaje en la salida:

$$V_{in} = I_1 R_1 + I_0 R_0 = 2IR \Rightarrow I = \frac{V_{in}}{2R} \Rightarrow V_o = IR_0 = \frac{V_{in}}{2R} R = \frac{V_{in}}{2}$$

Que es la misma relación para el caso OFF del diodo ideal. Para que ocurra este caso, es necesario que el voltaje V_D sea menor a 0.7. Así que se debe tener:

$$V_D = V_{in} - V_o = \frac{V_{in}}{2} < 0{,}7 \Leftrightarrow V_{in} < 1{,}4[V]$$

Ahora, cuando el diodo está encendido, el voltaje que cae a través de él debe ser igual a 0.7. Por LVK, se debe cumplir que la salida es igual a la entrada menos estos 0.7[V] que caen en el arreglo del diodo en paralelo con R_1. Es decir:

$$V_{in} = V_D + V_o = 0{,}7[V] + V_o \Rightarrow V_o = V_{in} - 0{,}7[V]$$

Ahora hay que verificar qué debe ocurrir para que se tenga este caso. Es decir, se debe verificar que la corriente circule a través del diodo *desde* la fuente *hacia* la resistencia R_0. Al establecerse un voltaje distinto de cero en los extremos de R_1, se produce una circulación de corriente a través de ella, a diferencia del caso ideal. Esta corriente es constante debido a que el voltaje establecido debe serlo, y es igual a

$$I_1 = \frac{V_D}{R_1} = \frac{0{,}7}{R}$$

Por otro lado, en la resistencia R_0 debe circular una corriente:

$$I_0 = \frac{V_o}{R_0} = \frac{V_{in} - 0{,}7}{R}$$

Por LCK, la corriente por el diodo cumple:

$$I_D + I_1 = I_0 \Rightarrow I_D = I_0 - I_1 = \frac{V_{in} - 1{,}4}{R}$$

Imponiendo que la corriente sea positiva, necesariamente:

$$I_D = \frac{V_{in} - 1{,}4}{R} > 0 \Leftrightarrow V_{in} > 1{,}4[V]$$

En resumen, la salida está dada por:

$$V_o = \begin{cases} V_{in} - 0{,}7[V] & V_{in} > 1{,}4[V] \\ V_{in}/2 & V_{in} < 1{,}4[V] \end{cases}$$

c) Utilizando la característica encontrada anteriormente, para una entrada senusoidal se tiene la salida que se observa en la Figura 6. En primer lugar, se observa que para los semi-ciclos negativos la salida es la mitad de la magnitud de la entrada.Pero a diferencia del caso ideal, la salida sigue teniendo la esta relación con la entrada en las porciones del semi-ciclo positivo en que el voltaje aun no es suficientemente grande como para activar el diodo. Una vez que el voltaje permanece por sobre el umbral de los 1.4[V], la salida es igual a la entrada menos la caída constante de voltaje de 0.7[V] que produce el diodo al activarse.

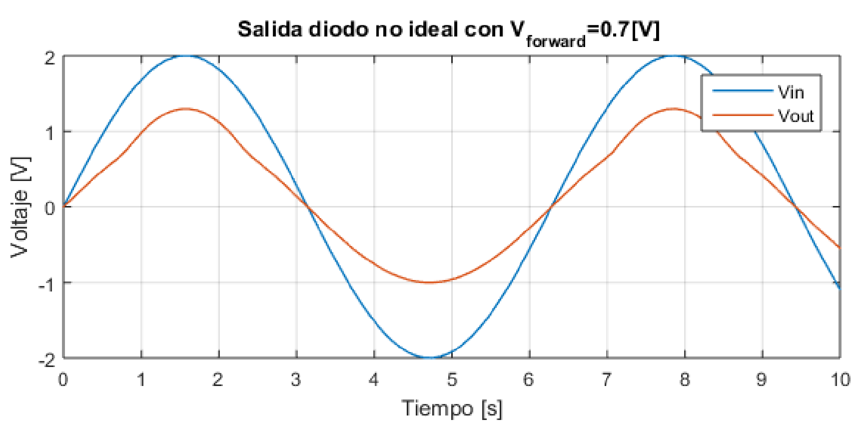

Figura 6: Caso para el diodo no ideal.