Clase Auxiliar 10

Profesor: Elton Dusha
Profesores Auxiliares: Ronald Leblebici, Simón Maturana, Eduardo Rivera

6 de junio, 2017

Problema 1: Demostraciones, modelo de Solow

Demuestre los siguientes enunciados.

A. Una función de producción Cobb-Douglas tiene economías de escala.
Es decir: $F(c \cdot K, c \cdot A \cdot L) = c \cdot F(K, A \cdot L)$, con $F(K, A \cdot L) = K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha}$

$$F(c \cdot K, c \cdot A \cdot L) = (c \cdot K)^{\alpha} \cdot (c \cdot A \cdot L)^{1-\alpha} = c^{\alpha} \cdot c^{1-\alpha} \cdot K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha} = c \cdot K^{\alpha} \cdot (A \cdot L)^{1-\alpha} \quad \square$$

B. Evolución de la fuerza de trabajo (L) en el tiempo: $\frac{dL(t)}{dt} = n \cdot L(t) \Rightarrow L(t) = L(0) \cdot e^{nt}$.
La misma propiedad aplica para A(t).

$$\frac{dL(t)}{dt} = n \cdot L(t)$$
$$\Rightarrow \int_{L(0)}^{L(t)} \frac{dL}{L} = n \cdot \int_0^t dt$$
$$\Rightarrow ln(L(t)) - ln(L(0)) = n \cdot t$$
$$\Rightarrow ln\left(\frac{L(t)}{L(0)}\right) = n \cdot t$$
$$\Rightarrow L(t) = L(0) \cdot e^{nt} \quad \square$$

C. Ecuación clave del modelo de Solow: $\dot{k} = s \cdot f(k) - (\delta + n + g) \cdot k$.

$$\dot{k} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{K}{AL}\right) = \frac{\dot{K}AL - K\frac{\partial}{\partial t}(AL)}{(AL)^2} = \frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{K}{AL}\right) = \frac{\dot{K}AL - K\dot{A}L - KA\dot{L}}{(AL)^2}$$
$$\Rightarrow \dot{k} = \frac{\dot{K}AL}{A^2L^2} - \frac{K\dot{A}L}{A^2L^2} - \frac{KA\dot{L}}{A^2L^2} = \frac{\dot{K}}{AL} - \frac{K\dot{A}}{A^2L} - \frac{K\dot{L}}{AL^2} = \frac{sY - \delta K}{AL} - \frac{K\dot{A}}{A^2L} - \frac{K\dot{L}}{AL^2}$$
$$\Rightarrow \dot{k} = s\left(\frac{Y}{AL}\right) - \delta\left(\frac{K}{AL}\right) - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{A}}{A} - \frac{K}{AL} \cdot \frac{\dot{L}}{L}$$
$$\Rightarrow \dot{k} = s \cdot f(k) - \delta \cdot k - k \cdot g - k \cdot n = s \cdot f(k) - (\delta + g + n) \cdot k \quad \square$$

D. $\frac{\partial c^*}{\partial s} = [f'(k^*) - (n + g + \delta)] \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s}$.

$$c^* = f(k^*) - (n + g + \delta) \cdot k^*$$
$$\Rightarrow \frac{\partial c^*}{\partial s} = f'(k^*) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} - (n + g + \delta) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} = [f'(k^*) - (n + g + \delta)] \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} \quad \square$$

E. Elasticidad de la producción en el equilibrio respecto al ahorro: $\frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$

$$\frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{s}{f(k^*)} \cdot \frac{\partial}{\partial s}(f(k^*)) = \frac{s}{f(k^*)} \cdot f'(k^*) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s}$$

Despejemos $\frac{\partial k^*}{\partial s}$. Partiendo de la ecuación del estado estacionario del modelo y derivando respecto a la tasa de ahorro s...

$$s \cdot f(k^*) = (n + g + \delta) \cdot k^*$$

$$\Rightarrow s \cdot f'(k^*) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s} + f(k^*) = (n + g + \delta) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial s}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial k^*}{\partial s} \cdot (s \cdot f'(k^*) - (n + g + \delta)) = -f(k^*)$$

$$\Rightarrow \frac{\partial k^*}{\partial s} = \frac{-f(k^*)}{s \cdot f'(k^*) - (n + g + \delta)}$$

Ahora reemplazamos esta expresión en la fórmula de $\frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s}$.

$$\frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{s}{f(k^*)} \cdot f'(k^*) \cdot \frac{-f(k^*)}{s \cdot f'(k^*) - (n + g + \delta)} = \frac{-s \cdot f'(k^*)}{(n + g + \delta) - s \cdot f'(k^*)}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{-s \cdot f(k^*) \cdot f'(k^*)}{[(n + g + \delta) - s \cdot f'(k^*)] \cdot f(k^*)} = \frac{-(n + g + \delta) \cdot k^* \cdot f'(k^*)}{[(n + g + \delta) - s \cdot f'(k^*)] \cdot f(k^*)}$$

$$\Rightarrow \frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{-(n + g + \delta) \cdot k^* \cdot f'(k^*)}{[(n + g + \delta) - \frac{s \cdot f(k^*) \cdot f'(k^*)}{f(k^*)}] \cdot f(k^*)} = \frac{-(n + g + \delta) \cdot k^* \cdot f'(k^*)}{[(n + g + \delta) - \frac{(n+g+\delta) \cdot k^* \cdot f'(k^*)}{f(k^*)}] \cdot f(k^*)}$$

Simplificando por $(n + g + \delta)$ y dividiendo numerador y denominador por $f(k^*)$:

$$\Rightarrow \frac{s}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial s} = \frac{\left[\frac{k^* \cdot f'(k^*)}{f(k^*)}\right]}{\left[1 - \frac{k^* \cdot f'(k^*)}{f(k^*)}\right]} = \frac{\alpha_k(k^*)}{1 - \alpha_k(k^*)} \quad \square$$

F. Elasticidad de la producción en el equilibrio respecto al la tasa de crecimiento de la fuerza de trabajo: $\frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial n} = \frac{-n}{n+g+\delta} \cdot \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$

$$\frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial n} = \frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial}{\partial n}(f(k^*)) = \frac{n}{f(k^*)} \cdot f'(k^*) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial n}$$

Calculemos $\frac{\partial k^*}{\partial n}$ partiendo desde la ecuación de estado estacionario y derivando respecto a n.

$$s \cdot f'(k^*) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial n} = k^* + (n + g + \delta) \cdot \frac{\partial k^*}{\partial n}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial k^*}{\partial n} \cdot [s \cdot f'(k^*) - (n + g + \delta)] = k^*$$

$$\Rightarrow \frac{\partial k^*}{\partial n} = \frac{k^*}{s \cdot f'(k^*) - (n + g + \delta)}$$

Notemos que:

$$s \cdot f'(k^*) = \frac{s \cdot f(k^*) \cdot f'(k^*)}{f(k^*)} = \frac{(n+g+\delta) \cdot k^* \cdot f'(k^*)}{f(k^*)} = (n+g+\delta) \cdot \alpha_k(k*)$$

Reemplazando este valor en la expresión de $\frac{\partial k^*}{\partial n}$:

$$\frac{\partial k^*}{\partial n} = \frac{k^*}{\alpha_k(k^*) \cdot (n+g+\delta) - (n+g+\delta)} = \frac{k^*}{[\alpha_k(k^*) - 1] \cdot (n+g+\delta)}$$

Reemplazando este valor en la expresión de $\frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial n}$:

$$\frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial n} = \frac{n}{f(k^*)} \cdot \frac{k^*}{[\alpha_k(k^*) - 1] \cdot (n+g+\delta)} = \frac{-n}{n+g+\delta} \cdot \frac{\left[\frac{k^* \cdot f'(k^*)}{f(k^*)}\right]}{1-\alpha_k(k^*)} = \frac{-n}{n+g+\delta} \cdot \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$$

G. Rapidez de convergencia: $k(t) = e^{-\lambda t} \cdot (k(0) - k^*) + k^*$ con $\lambda = (n+g+\delta) \cdot (1 - \alpha_k(k^*))$.

Recordemos que una serie de Taylor de una función $f(x)$ cuando $x \approx x_0$ se expresa de la siguiente manera:

$$f(x) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{f^{(i)}(x_0) \cdot (x-x_0)^i}{i!}$$

Haciendo la aproximación de orden 1...

$$f(x) \approx f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0)$$

Nos interesa aproximar $\dot{k}(k)$ cuando $k \approx k^*$. Es decir, cuando nos encontramos cerca del estado estacionario.

$$\dot{k}(k) \approx \dot{k}(k = k^*) + \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}(k - k^*)$$

Notando que $\dot{k}(k - k^*) = 0$, por definición del estado estacionario y definiendo $-\lambda = \frac{\partial \dot{k}}{\partial k}(k - k^*)$:

$$\dot{k} = -\lambda \cdot (k - k^*)$$

Para obtener la expresión explícita de $k(t)$, resolvemos la EDO lineal de primer orden mediante integración directa:

$$\int_{k(0)}^{k(t)} \frac{dk}{k - k^*} = -\lambda \int_0^t dt$$

$$\Rightarrow ln(k(t) - k^*) - ln(k(0) - k^*) = -\lambda t$$

$$\Rightarrow \frac{k(t) - k^*}{k(0) - k^*} = e^{-\lambda t}$$

$$k(t) = [k(0) - k^*] \cdot e^{-\lambda t} + k^* \quad \square$$

Problema 2 (Romer 1.7): Un poco de elasticidad...

Considerar que n disminuye de un 2 % a un 1 %.

A. Calcule la elasticidad del producto por unidad de trabajo efectivo en el estado estacionario, y^*, con respecto a la tasa de crecimiento de la población, n, si $\alpha_k(k^*) = \frac{1}{3}$, $g = 2\,\%$ y $\delta = 3\,\%$.

En el problema 1 demostramos que:

$$\frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial n} = \frac{-n}{n+g+\delta} \cdot \frac{\alpha_k(k^*)}{1-\alpha_k(k^*)}$$

Para calcular n, ocupamos el punto medio del valor inicial y el final:

$$n = \frac{2\,\% + 1\,\%}{2} = 1{,}5\,\%$$

Reemplazando los valores correspondientes en la fórmula:

$$\frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial n} = \frac{-1{,}5\,\%}{1{,}5\,\% + 2\,\% + 3\,\%} \cdot \frac{\frac{1}{3}}{1-\frac{1}{3}} \approx -0{,}12$$

B. ¿Cuánto aumenta y^*?

Veamos cuál fue la variación porcentual de n:

$$\frac{\Delta n}{n} = \frac{1\,\% - 2\,\%}{2\,\%} = -50\,\%$$

Utilizando la elasticidad ya calculada:

$$\frac{\Delta y^*}{y^*} \approx \frac{\Delta n}{n} \cdot \frac{n}{y^*} \cdot \frac{\partial y^*}{\partial n} = -0{,}5 \cdot -0{,}12 = 0{,}06$$

Por lo tanto, y^* aumenta un 6 % aproximadamente.