MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Pauta 1 : Lógica Proposicional

23 de marzo del 2017

P1. [Metódos de Demostración]
Sean p, q, r, s proposiciones lógicas.

a) Demuestre mediante el método algebraico que:

1) $p \vee q \vee (\overline{p} \wedge \overline{q})$.
2) $(\overline{p} \wedge \overline{q}) \iff \overline{(p \vee (\overline{p} \wedge q))}$.
3) $[(p \implies \overline{q}) \wedge (r \implies q)] \implies (p \implies \overline{r})$.

b) Demuestre mediante el método exploratorio que:

1) $(p \implies r) \implies ((p \wedge q) \implies r)$.
2) $[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \implies [(p \wedge r) \implies (q \wedge s)]$.

c) Demuestre por contradicción:

1) $(p \wedge q) \implies (p \vee q)$.
2) $[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \implies [(p \wedge r) \implies (q \wedge s)]$.

Solución 1.

a) El método algebraico consiste en utilizar tautologías conocidas para llegar a lo que queremos. Los siguientes tres problemas, ejemplifican proposiciones donde es razonable utilizar esta técnica.

1) Al no tener condicionales ($\implies$, $\iff$), uno pensaría en ocupar el método algebraico. Trabajando esto:

$$\begin{aligned} p \vee q \vee (\overline{p} \wedge \overline{q}) &\equiv \underbrace{(p \vee q)}_{r} \vee \underbrace{\overline{(p \vee q)}}_{\overline{r}} \\ &\equiv V \end{aligned}$$

2) Al tener que demostrar un bicondicional ($\iff$), la idea es partir de un lado de este y llegar al otro lado utilizando solamente equivalencias. Una buena idea para elegir lado de "partida" es elegir el lado que posea más información.

$$\begin{aligned} \overline{(p \vee (\overline{p} \wedge q))} &\equiv \overline{p} \wedge \overline{(\overline{p} \wedge q)} \\ &\equiv \overline{p} \wedge (p \vee \overline{q}) \\ &\equiv \underbrace{(\overline{p} \vee p)}_{V} \wedge (\overline{p} \wedge \overline{q}) \\ &\equiv V \wedge (\overline{p} \wedge \overline{q}) \\ &\equiv \overline{p} \wedge \overline{q} \end{aligned}$$

3) Notemos que esta proposición se parece bastante a la transitividad de la implicancia, veamos si podemos modificarla para llegar a esto de manera rápida:

$$\begin{aligned} [(p \implies \overline{q}) \wedge (r \implies q)] &\equiv [(p \implies \overline{q}) \wedge (\overline{q} \implies \overline{r})] \\ &\Rightarrow [(p \implies \overline{r})] \end{aligned}$$

b) Si bien en general el método exploratorio consiste en demostrar solo los casos interesantes de la tabla de verdad, la mayoría de las veces lo utilizaremos para demostrar proposiciones del tipo $A \implies B$, en este caso supondremos que $A \equiv V$ (pensamos en A como una hipótesis) y trataremos de demostrar que $B \equiv V$ (pensaremos en B cómo una conclusión).

1) Tendremos como Hipótesis que $[p \implies r] \equiv V$ y trataremos de probar que $[(p \wedge q) \implies r] \equiv V$, trabajemos esto último:

$$\begin{aligned}(p \wedge q) \implies r &\equiv \overline{(p \wedge q)} \vee r \\ &\equiv \overline{p} \vee \overline{q} \vee r \\ &\equiv \overline{q} \vee \underbrace{(\overline{p} \vee r)}_{p \Rightarrow r} \\ &\equiv \overline{q} \vee \underbrace{(p \implies r)}_{V} \\ &\equiv \overline{q} \vee V \\ &\equiv V\end{aligned}$$

2) Supondremos que $(p \implies q) \equiv V$ y $(r \implies s) \equiv V$ y probaremos que $[(p \wedge r) \implies (q \wedge s)] \equiv V$.

$$\begin{aligned}[(p \wedge r) \implies (q \wedge s)] &\equiv [\overline{(p \wedge r)} \vee (q \wedge s)] \\ &\equiv (\overline{p} \vee \overline{r}) \vee (q \wedge s) \\ &\equiv \overline{p} \vee [(\overline{r} \vee q) \wedge \underbrace{(\overline{r} \vee s)}_{r \Rightarrow s}] \\ &\equiv \overline{p} \vee [(\overline{r} \vee q) \wedge (\underbrace{r \implies s}_{V})] \\ &\equiv \overline{p} \vee \overline{r} \vee q \\ &\equiv \underbrace{\overline{p} \vee q}_{p \Rightarrow q} \vee \overline{r} \\ &\equiv \underbrace{(p \implies q)}_{V} \vee r \equiv V \vee r \equiv V\end{aligned}$$

c) La idea de las demostraciones por contradicción en el caso de implicancias consiste en partir desde $A \implies B$ y suponer que $A \equiv V$ y $B \equiv F$. Si a partir de lo anterior llegamos a una contradicción, sabemos que este supuesto debe estar errado, es decir $A \not\equiv V$ o $B \not\equiv F$. De lo anterior se puede concluir que $A \implies B$ es verdadero.

1) Supongamos en busca de una contradicción que $(p \wedge q) \equiv V$ y que $(p \vee q) \equiv F$. Como $(p \wedge q) \equiv V$, esto significa que $p \equiv V$ y $q \equiv V$. Por otro lado como $(p \vee q) \equiv F$ sabemos que $p \equiv F$ y $q \equiv F$, lo que contradice el hecho que $p \equiv V$.
2) De nuevo en busca de una contradicción supongamos que $[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \equiv V$ y que $[(p \wedge r) \implies (q \wedge s)] \equiv F$. Como $[(p \wedge r) \implies (q \wedge s)] \equiv F$, entonces $(p \wedge r) \equiv V$ y $(q \wedge s) \equiv F$, de lo primero notamos que $p \equiv V$ y $r \equiv V$. Ocupando esta información en $[(p \implies q) \wedge (r \implies s)] \equiv V$ concluimos que $(V \implies q) \equiv V$ y que $(V \implies s) \equiv V$, de esto concluimos que $q \equiv V$ y $s \equiv V$. Lo anterior es un problema pues $(q \wedge s) \equiv V$, pero ya habiamos mostrado antes que $(q \wedge s) \equiv F$ lo que es una contradicción.

P2. [P1 *a*) Control 1, Año 2016 + P1 *a*) Control 1, Año 2012]
Sean p, q y r tres proposiciones.

a) Demuestre, sin usar tablas de verdad, que

$$[(p \vee q) \iff r] \implies [(q \implies r) \wedge (p \implies r)]$$

b) Demuestre que

$$[p \Rightarrow (q \Rightarrow r)] \not\Leftrightarrow [(p \Rightarrow q) \Rightarrow r]$$

Solución 2.

a) Al haber una implicancia, nuestro primer instinto será usar el método exploratorio. Para esto asumamos que $(p \vee q) \iff r$ es verdadero y probemos la parte de la derecha de la implicancia.

$$\begin{aligned}
[(q \implies r) \wedge (p \implies r)] &\equiv [(q \implies (p \vee q)) \wedge (p \implies (p \vee q))] \\
&\equiv [(\overline{q} \vee p \vee q) \wedge (\overline{p} \vee p \vee q)] \\
&\equiv [(\underbrace{\overline{q} \vee q}_{V} \vee p) \wedge (\underbrace{\overline{p} \vee p}_{V} \vee q)] \\
&\equiv [\underbrace{(V \vee p)}_{V} \wedge \underbrace{(V \vee q)}_{V}] \\
&\equiv [V \wedge V] \\
&\equiv V
\end{aligned}$$

b) Para demostrar que dos proposiciones no son equivalentes ($\not\Leftrightarrow$) basta con encontrar una asignación de valores de verdad donde difieran. Esto se puede hacer "adivinando adecuadamente"o uno puede comparar ambas tablas de verdad y ver que son diferentes:

p	q	r	$p \Rightarrow (q \Rightarrow r)$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	V
F	F	V	V
F	F	F	V

p	q	r	$(p \Rightarrow q) \Rightarrow r$
V	V	V	V
V	V	F	F
V	F	V	V
V	F	F	V
F	V	V	V
F	V	F	F
F	F	V	V
F	F	F	F

P3. [Encontrar valores de verdad y un nuevo conectivo]

a) Determine el valor de verdad de las proposiciones p, q, r, s, t si se sabe que la siguiente proposición es falsa:

$$[(p \iff q) \wedge \overline{(r \implies s)} \wedge \bar{t}\ ] \implies [s \vee (q \implies s)]$$

b) Se define un operador ternario Δ como sigue:

$$\Delta(a, b, c) \iff [a \implies (b \wedge c)]$$

Demuestre que:

1) $\Delta(a, b, c) \iff \Delta(a, c, b)$.
2) $\Delta(a, a, b) \iff (a \implies b)$.
3) $\Delta(a \wedge b \wedge c, b, c) \iff V$.

Solución 3.

a) Notemos que como tenemos una implicancia que es falsa, la parte de la izquierda debe ser V y la de la derecha F, por tanto:

$$\underbrace{[(p \iff q) \wedge \overline{(r \implies s)} \wedge \bar{t}]}_{(1)\equiv V} \implies \underbrace{[s \vee (q \implies s)]}_{(2)\equiv F}$$

Como (2) es falso, sabemos que $s \equiv F$ y que $(q \implies s) \equiv F$, por tanto $q \equiv V$ y $s \equiv F$. Examinemos (1) ahora:

$$[\underbrace{(p \iff q)}_{V} \wedge \underbrace{\overline{(r \implies s)}}_{V} \wedge \underbrace{\bar{t}}_{V}]$$

La primera nos dice que p y q tienen el mismo valor de verdad, por tanto $p \equiv V$. La segunda nos dice que $(r \implies s) \equiv F$, es decir $r \equiv V$ y $s \equiv F$. Por último $t \equiv F$ y con eso tenemos los valores de todas las variables proposicionales.

b) La idea es escribir la proposición Δ en términos de conectivos conocidos y de ahí utilizar tautologías para dichos conectivos.

1) Como estamos probando una equivalencia, nuestra primera idea será utilizar el metódo algebraico.

$$\begin{aligned}\Delta(a, b, c) &\equiv [a \implies (b \wedge c)] \\ &\equiv [a \implies (c \wedge b)] \\ &\equiv \Delta(a, c, b)\end{aligned}$$

2) Nuevamente como estamos probando una equivalencia trataremos de utilizar el método algebraico:

$$\begin{aligned}\Delta(a, a, b) &\equiv [a \implies (a \wedge b)] \\ &\equiv [\overline{a} \vee (a \wedge b)] \\ &\equiv [\underbrace{(\overline{a} \vee a)}_{V} \wedge \underbrace{(\overline{a} \vee b)}_{a \Rightarrow b}] \\ &\equiv (a \implies b)\end{aligned}$$

3) Si bien pareciera que esta vez estamos probando una equivalencia, en verdad queremos probar que $(a \wedge b \wedge c) \implies (b \wedge c)$ es verdadero, por lo tanto pensaremos en utilizar el método exploratorio. Luego, tendremos como hipótesis $(a \wedge b \wedge c) \equiv V$ y trataremos de probar que $(b \wedge c) \equiv V$. En efecto $(a \wedge b \wedge c) \equiv V$ nos dice que $a \equiv V, b \equiv V$ y $c \equiv V$, de esto podemos concluir que $(b \wedge c) \equiv V$.

P4. [NOR]
A usted le cuentan de un nuevo conectivo lógico $\downarrow$ que se utiliza para significar "ni". Es decir $P \downarrow Q$ se lee como "ni P ni Q".

a) Encuentre una tabla de verdad para el conectivo $\downarrow$.

b) Encuentre una proposición equivalente a $P \downarrow Q$, que use solo los conectivos $\{\vee, \wedge, -\}$.
Obs : No es necesario que use todos los conectivos.

c) Demuestre que las siguientes proposiciones son tautologías :

1) $\bar{a} \iff (a \downarrow a)$
2) $(a \wedge b) \iff [(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)]$
3) $(a \vee b) \iff [(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)]$

Solución 4.

a) De manera natural el conectivo "ni" va a ser verdadero sólo cuando p y q sean falsos. Por tanto la tabla de verdad sería:

p	q	$p \downarrow q$
V	V	F
V	F	F
F	V	F
F	F	V

b) Esto se puede ver de dos maneras. La primera es notar que la tabla de verdad que construimos en la parte anterior es la negación del conectivo $\vee$, esto nos dice que nuestra proposición es $\overline{(p \vee q)}$. Otra forma de verlo es notar que nuestra proposición se hace verdadera si y sólo si ambas p y q son falsas, de esto vemos que nuestra proposición debe ser $\overline{p} \wedge \overline{q}$.

c) Al igual que en la **P3.** la idea es escribir el conectivo "desconocido" en términos de conectivos que conozcamos bien.

1) Veamos que $\overline{a} \iff (a \downarrow a)$.

$$\begin{aligned}(a \downarrow a) &\equiv \overline{(a \vee a)}\\ &\equiv (\overline{a} \wedge \overline{a})\\ &\equiv \overline{a}\end{aligned}$$

2) Veamos ahora que $(a \wedge b) \iff [(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)]$.

$$\begin{aligned}[(a \downarrow a) \downarrow (b \downarrow b)] &\equiv [\overline{a} \downarrow \overline{b}]\\ &\equiv \overline{(\overline{a} \vee \overline{b})}\\ &\equiv (\overline{\overline{a}} \wedge \overline{\overline{b}})\\ &\equiv (a \wedge b)\end{aligned}$$

3) Y por último que $(a \vee b) \iff [(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)]$.

$$\begin{aligned}[(a \downarrow b) \downarrow (a \downarrow b)] &\equiv \overline{(a \downarrow b)}\\ &\equiv \overline{\overline{(a \vee b)}}\\ &\equiv (a \vee b)\end{aligned}$$

P5. [P1 i) Control 1, Año 2006]
Sean p, q, r, s, t, u proposiciones. Suponga que se sabe que una de las siguientes proposiciones es verdadera.

$$\begin{aligned} \text{I} &\Leftrightarrow p \wedge q \wedge \overline{r} \wedge s \wedge \overline{t} \wedge u \\ \text{II} &\Leftrightarrow \overline{p} \wedge q \wedge r \wedge \overline{s} \wedge \overline{t} \wedge u \end{aligned}$$

Cuál o cuáles de las siguientes proposiciones se puede asegurar que es verdadera?
Cuál o cuáles puede asegurar que es falsa?
En cuál o cuáles no puede garantizar su veracidad o falsedad?

a) $(q \wedge s) \Leftrightarrow (p \vee t)$.
b) $(q \wedge t) \vee (\overline{r} \wedge \overline{u})$.
c) $\overline{(p \Rightarrow t)} \Rightarrow (r \wedge t)$.

Solución 5. Como tanto I y II son solamente conjunciones ($\wedge$) notemos que esto significa que todas las proposiciones que participan en ellas deben ser verdaderas. Luego si I es verdadero:

$$p \equiv V \quad q \equiv V \quad r \equiv F \quad s \equiv V \quad t \equiv F \quad u \equiv V$$

Mientras que si II es verdadero:

$$p \equiv F \quad q \equiv V \quad r \equiv V \quad s \equiv F \quad t \equiv F \quad u \equiv V$$

Como alguna de estas dos tiene que ser verdadero estamos 100 % seguros que:

$$q \equiv V \quad t \equiv F \quad u \equiv V$$

Mientras que los valores de p, r y s no se conocen. Pero sabemos que tanto p y s deben tener el mismo valor de verdad (esto pues si I es verdadero, ambos son verdaderos y si II lo es, ambos son falsos), además r tiene el valor de verdad contrario, luego:

$$p \equiv s \equiv \overline{r}$$

a) Ocupando las cosas que habiamos visto:

$$\begin{aligned} (q \wedge s) \iff (p \vee t) &\equiv \underbrace{(V \wedge p)}_{p} \iff \underbrace{(p \vee F)}_{p} \\ &\equiv p \iff p \\ &\equiv V \end{aligned}$$

b) Para la segunda:

$$\begin{aligned} (q \wedge t) \vee (\overline{r} \wedge \overline{u}) &\equiv \underbrace{(V \wedge F)}_{F} \vee \underbrace{(\overline{r} \wedge F)}_{F} \\ &\equiv F \end{aligned}$$

c) Para la tercera:

$$\begin{aligned} \overline{(p \implies t)} \implies (r \wedge t) &\equiv \overline{(p \implies F)} \implies \underbrace{(\overline{p} \wedge F)}_{F} \\ &\equiv \overline{(\overline{p} \vee F)} \implies F \\ &\equiv \overline{(\overline{p})} \implies F \\ &\equiv p \implies F \\ &\equiv \overline{p} \end{aligned}$$

Luego de la tercera no se conoce el valor de verdad.