MA1101-5 Introducción al Álgebra
Profesor: Mauricio Telias
Auxiliar: Arturo Merino

Auxiliar 2 : Cuantificadores y Principio de Inducción

30 de marzo del 2017

Recordemos:

- Una función proposicional es una expresión $p(x)$, tal que al reemplazar x en la función esta se transforma en una proposición $p(x)$.
- Un cuantificador nos proporciona información sobre los objetos a evaluar en la función proposicional. Los clásicos cuantificadores son :
  1. Cuantificador Universal ($\forall$), se lee "para todo".
  2. Cuantificador Existencial ($\exists$), se lee "existe".
  3. Cuantificador de Existencia y Unicidad ($\exists!$), se lee "existe un único".
- Las negaciones clásicas con cuantificadores son:
  1. $\overline{[\forall x, p(x)]} \iff [\exists x, \overline{p(x)}]$
  2. $\overline{[\exists x, p(x)]} \iff [\forall x, \overline{p(x)}]$
  3. $\overline{[\exists! x, p(x)]} \iff [\forall x, \overline{p(x)}] \vee [\exists x, y, p(x) \wedge p(y) \wedge x \neq y]$
- La proposición $x \in A$ se lee x pertenece al conjunto A.
- Consideremos una proposición:

$$(\forall n \in \mathbb{N}, n \geq n_0)p(n)$$

Entonces esto es equivalente a:

$$p(n_0) \wedge [(\forall n \geq n_0)p(n) \implies p(n+1)]$$

y también es equivalente a:

$$p(n_0) \wedge [(\forall n \geq n_0)(p(n_0) \wedge \cdots \wedge p(n-1)) \implies p(n)]$$

P1. [Demostraciones Cuantificadas]

a) Demuestre que $[\exists m \in \mathbb{Z}] \left[\frac{m-7}{2m+4} = 5\right]$.

b) Demuestre que: $[\forall n \in \mathbb{N}][n \text{ es par} \iff n^2 \text{ es par}]$.

P2. [P1 *b*) Control 1, Año 2012 + P1 *b*) Control 1, Año 2015]

a) Demuestre que $[\exists y][p(y) \implies (\forall x)p(x)]$ es una tautología

b) Muestre que las proposiciones:

$$\text{(i) } [\forall x][\exists y][p(x) \implies p(y)] \qquad \text{(ii) } [\exists y][\forall x][p(x) \implies p(y)]$$

Son ambas verdaderas para cada función proposicional $p(\cdot)$.

P3. [Todos los caballos tienen el mismo color]

Su amigo Juan Pablo le cuenta que ha notado una cosa curiosa últimamente ¡Todo el mundo se llama Juan Pablo! Usted siendo una persona escéptica y conocedor de que Juan Pablo suele mentir, le pide una demostración de tal afirmación. Orgulloso Juan Pablo le presenta el siguiente argumento:

Demostraremos que toda la gente tiene el mismo nombre, por inducción sobre el número de personas n.

Caso Base ($n = 1$)
Claramente en todo grupo de 1 persona poseen todos el mismo nombre.

Hipótesis Inductiva
Todo grupo de n personas posee el mismo nombre.

Paso Inductivo $(n+1)$
Consideremos un grupo de $n+1$ personas. Si tomamos las n primeras personas por Hipótesis inductiva todas deben tener el mismo nombre, de similar manera las n últimas personas deben tener el mismo nombre. Tomando una persona que no sea la primera ni la última vemos que tanto los n primeros como los n últimos deben tener el mismo nombre, por tanto las $n+1$ personas poseen el mismo nombre.

Para concluir, dice Juan Pablo, como todas las personas tienen el mismo nombre y yo me llamo Juan Pablo, claramente todos nos llamamos Juan Pablo.

¿Donde está el error en el argumento de Juan Pablo?

P4. [Varios de inducción]
Demuestre usando el principio de inducción las siguientes proposiciones para $n \in \mathbb{N}$:

a) n puntos sobre una recta generan $n+1$ segmentos $\forall n \geq 0$.
b) Demuestre que $2^0 + 2^1 + 2^2 + ... + 2^n = 2^{n+1} - 1$ para todo n.
c) $6n < 2^n$ para todo $n \geq n_0$ (debe encontrar tal n_0).
d) Considere la siguiente sucesión definida mediante la recurrencia $s_0 = 0, s_n = 2s_{n-1} + 1$. Encuentre una forma cerrada para s_n y demuestre que es correcta.

P5. [Divisibilidad]

a) Demuestre que $n^2 + n$ es par para todo $n \geq 0$.
b) Demuestre que $3^n + 4^n - 1$ es divisible por 3 para todo $n \geq 1$.
c) Demuestre que $(\forall n \in \mathbb{N}) \quad 5^{2n} + (-1)^{n+1}$ es divisible por 13.

P6. [Nuggets]
La cadena de comida rápida McKing vende nuggets de pollo en dos modalidades:

- Una bolsa de 3 nuggets.
- Una cajita de 5 nuggets.

Demuestre que si usted quiere comprar $n \geq 8$ nuggets en McKing puede hacerlo de manera exacta (es decir hay una combinación de bolsas y cajitas tal que no le sobran ni faltan nuggets).

Figura 1: Estos 9 nuggets puede ser conseguidos comprando 3 bolsas.

P7. [Fila]
Sea F el conjunto de personas que se encuentra esperando en la fila del casino de la escuela para ser atendidas. Para $x, y \in F$ se define la función proposicional:

$$\phi(x, y) \iff \text{“El alumno } x \text{ está más adelante que el alumno } y \text{ en la fila”}$$

a) Sean $p, q, r \in F$, determine la posición de p, q y r en la fila si satisfacen lo siguiente:
1) $(\forall x \in F)[\phi(p, x) \vee x = p]$
2) $(\forall x \in F)[\phi(x, q) \vee x = q]$
3) $(\exists! x \in F)[\phi(r, x) \veebar \phi(x, r)]$

b) Niegue las proposiciones anteriores.
Hint: Es útil encontrar formas más sencillas para las proposiciones $\overline{\phi(x, y)}$ *y* $\phi(x, y) \iff \phi(y, x)$.