

MA1101-5 Introducción al Álgebra

Profesor: Mauricio Telias

Auxiliar: Arturo Merino



Auxiliar 3 : Repaso y Teoría de Conjuntos

7 de abril del 2017

“Precontrol” 3:

P1. [P2 Control 1, 2011]

- (i) Se define un nuevo conectivo lógico \boxtimes por:

$$(p \boxtimes q) \iff (\exists r \text{ tal que } p \iff r \wedge r \iff q).$$

Demuestre que $(p \boxtimes q) \iff (p \iff q)$.

- (ii) Dadas las tautologías p, q, r demostrar, sin usar tablas de verdad, que la siguiente proposición es una tautología $[(p \implies \bar{q}) \wedge (\bar{r} \vee q) \wedge r] \implies \bar{p}$.

P2. [Inducción]

- a) Demuestre que para todo $n \in \mathbb{N}^+$ 9 divide a $4^n + 6n - 1$.
- b) Sea $(F_n)_{n \in \mathbb{N}}$ la sucesión de Fibonacci. Demuestre que para todo $m, n \in \mathbb{N}^+$, $F_{m+n} = F_{m-1}F_n + F_mF_{n+1}$.

Recordemos:

- La proposición $x \in A$ se lee x pertenece al conjunto A .
- A partir de un conjunto universo \mathcal{U} y una proposición lógica $p(x)$, podemos definir el conjunto A de quienes satisfacen la proposición lógica como:

$$(\forall x)[(x \in A) \iff (x \in \mathcal{U} \wedge p(x))]$$

O de manera abreviada:

$$A = \{x \in \mathcal{U} : p(x)\}$$

- Se define el conjunto vacío como:

$$\emptyset = \{x \in \mathcal{U} : x \neq x\} = \{\}$$

- Diremos que A es subconjunto de B si:

$$(A \subseteq B) \iff [(x \in A) \implies (x \in B)]$$

De similar manera:

$$(A = B) \iff [(A \subseteq B) \wedge (B \subseteq A)]$$

- Sean A y B dos subconjuntos de \mathcal{U} . Definimos las siguientes operaciones entre conjuntos :

$$1. A \cup B = \{x : x \in A \vee x \in B\}$$

$$2. A \cap B = \{x : x \in A \wedge x \in B\}$$

$$3. A^c = \{x : x \notin A\}$$

$$4. A \setminus B = A \cap B^c$$

$$5. A \triangle B = (A \setminus B) \cup (B \setminus A) = (A \cup B) \setminus (A \cap B)$$

- La unión e intersección satisfacen las leyes de conmutatividad, asociatividad, distributividad y de Morgan.

- Definimos el conjunto de las partes de un conjunto A como la familia de todos los subconjuntos de A .

$$\mathcal{P}(A) = 2^A = \{X : X \subseteq A\}$$

- Sea $a \in A$ y $b \in B$, definimos el par ordenado (a, b) como:

$$(a, b) = \{\{a\}, \{a, b\}\}$$

- La igualdad de pares ordenados es por coordenadas, es decir:

$$(a, b) = (c, d) \iff (a = c \wedge b = d)$$

- Definimos el producto entre A y B como:

$$A \times B = \{(a, b) : a \in A \wedge b \in B\}$$

P1. [Varios]

Sean A, B, X subconjuntos de un universo \mathcal{U} . Demuestre que:

- $\mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cap B)$
- $(A \cap B) \cup X = A \cap (B \cup X) \iff X \subseteq A$
- $(A \cup B) \times X = (A \times X) \cup (B \times X)$

P2. [Álgebra de Conjuntos]

Sean A, B, C y D conjuntos. Demuestre las siguientes igualdades:

- $(A \setminus B) \cup (A \setminus C) = A \setminus (B \cap C)$
- $[A \setminus (B \setminus A)] \cup [(B \setminus A) \setminus A] = A \cup B$

P3. [Diferencia Simétrica]

Sean $A, B, C \in \mathcal{P}(\mathcal{U})$.

- Demuestre la *propiedad cancelativa* de la diferencia simétrica, es decir:

$$A \Delta B = A \Delta C \implies B = C$$

- Use lo anterior para demostrar que:

$$B = (A \cap B^c) \cup (A^c \cap B) \iff A = \emptyset$$

- Use la propiedad cancelativa para demostrar que $\forall X, Y \subseteq \mathcal{U}$ se tiene la siguiente propiedad:

$$(X \cup A = Y \cup A) \wedge (X \cap A = Y \cap A) \implies X = Y$$

donde $A \subseteq \mathcal{U}$ es un conjunto fijo.

P4. [Conjunto Potencia]

Sean A y B subconjuntos de un universo \mathcal{U} . Demuestre que:

- $A \cap B = \emptyset \iff \mathcal{P}(A) \cap \mathcal{P}(B) = \{\emptyset\}$
- $[\mathcal{P}(A) \cup \mathcal{P}(B) = \mathcal{P}(A \cup B)] \iff [A \subseteq B \vee B \subseteq A]$.

P5. [Una Ecuación con conjuntos]

- Sean A, B dos conjuntos no-vacíos demuestre que:

$$A \cap B = \emptyset \iff (A \cup B) \setminus B = A$$

- Sean A, B dos conjuntos no-vacíos, encuentre un conjunto X que verifique las siguientes ecuaciones:

$$A \cup X = A \cup B \quad A \cap X = \emptyset$$

- ¿Es la solución que encontró en la parte anterior única?